UNIVERSITÉ DE TOURS– L2– GÉOMÉTRIE 2020-2021

Feuille 3

Notations et terminologie : Tous les exercices-sauf specification du contraire- portent sur le plan cartésien euclidien $\mathbb{R}^2$. La rotation vectorielle d'angle θ sera noté R_θ et une symétrie d'angle ϕ sera notée S_ϕ où ϕ dénote l'angle entre l'axe $\vec{O}x$ et l'axe de la symétrie.
Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^2$ est *invariant* par une transformation du plan f si $f(x)=x \quad \forall x \in S \subset \mathbb{R}^2$. Il est dit *stable*, si $f(S)=S$.

Exercice 0
Soit (A,B,C,D) un trapèze tel que (AB) est parallèle à (DC). Soient E le milieu du côté AD et F le milieu du côté BC. Montrer que (EF) est parallèle à (AB) et de longueur égale à $\frac{|AB|+|DC|}{2}$ (on pourra calculer la longueur du vecteur $\vec{EF}$

• Isométries vectorielles

Exercice 1
On considère une isométrie vectorielle $F \in O(2,\mathbb{R})$.

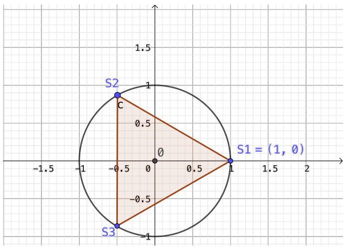
1. Montrer que S est invariant par F ssi $S = ker(F - Id)$ et donc que S est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que le seul sous-espace vectoriel invariant par une rotation vectorielle $R \in O(2,\mathbb{R}), \quad R \neq Id$, est le vecteur nul.
3. Montrer que le seul sous-espace vectoriel invariant par une symétrie vectorielle S est une droite vectorielle (axe de la symétrie).
4. Montrer qu'il existe aussi une et une seule droite vectorielle stable par S mais non invariante. Y-a-t'il d'autres droites affines stables?
5. Montrer que la composée de deux symétries vectorielles S_ϕ et S_ψ est une rotation vectorielle dont on déterminera l'angle en fonction de ϕ et ψ. En déduire qu'il y a une infinité de façon de décrire une rotation R_θ comme la composée de 2 symétries .
6. Montrer que $R_\phi \circ S_\theta$ est une symétrie dont on déterminera l'angle; même question pour $S_\theta \circ R_\phi$

Exercice 2
Pour chaque question, on donnera aussi les matrices des isométries correspondantes dans la base canoniques. On donnera aussi dans chaque cas un polygone régulier stable par le sous-groupe

1. Déterminer le sous-groupe engendré par les rotations vectorielles dont l'angle est un multiple de π.
2. Déterminer le sous-groupe engendré par les symétries vectorielles dont l'angle est un multiple de π.
3. Déterminer le sous-groupe engendré par les rotations vectorielles dont l'angle est un multiple de π.
4. Déterminer le sous-groupe engendré par les symétries vectorielles dont l'angle est un multiple de $\pi/2$.

Exercice 3

On considère le triangle équilatéral de sommets $S_1 = (1,0), S_2 = \frac{1}{2}(-1,\sqrt{3}), S_3 = -\frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$



•Déterminer les symétries vectorielles qui laissent le triangle stable (on donnera l'ax de symétrie ou l'angle que fait cet axe avec l'axe ox).

• Déterminer les rotations vectorielles qui laissent le triangle stable.

• Ces isométries définissent un sous-groupe d'isométries dont on donnera la table c composition.

• Isométries affines : premiers exemples et première application

Exercice 4

On considère les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1+y \\ x+1 \end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1+y \\ x+2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

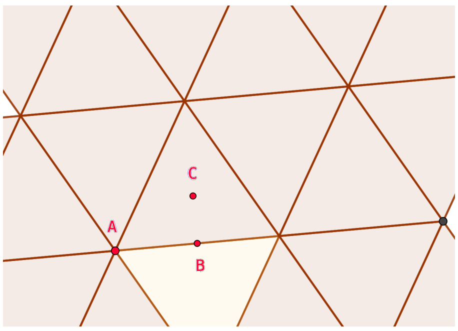
$$j\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}\quad k\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 3x+1 \\ 3y+2 \end{pmatrix}\quad l\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$m\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1-y \\ x+2 \end{pmatrix},\quad n\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \tag{3}$$

Pour chacune de ces applications préciser lesquelles sont linéaires, affines, autres, lesquelles sont des isométries (directes ou indirectes) , et tentez de les reconnaitre si possible (projections, symmétries, rotations, translations, symétries glissées, similitudes...)

Exercice 3

On considère un pavage de triangles équilatéraux . On cherche les isométries pour lesquelles le pavage est stable



•Montrer que l'ensemble des isométries qui conservent le pavage est un sous-groupe d'isométries (dénommé ici hexascope et noté H).

• Décrire géométriquement les isométries H_A qui laissent A invariant (on pourra se ramener à des isometries vectorielles en identifiant A avec l'origine de $\mathbb{R}^2$).

• Même question pour H_B et H_C. On peut montrer que tout élément de H est la composée d'éléments de H_A, H_B, et H_C.

• Montrer que ce sous-groupe d'isométries (affine) est d'ordre infini (on rappelle qu'une translation peut s'écrire comme la composée de deux symétries d'axe paralléles).

Exercice 4 *

On se propose de montrer que les bissectrices d'un triangle sont concourantes.

Soit un triangle non plat de sommets A, B, C. Soit d_A, d_b, d_C les bissectrices intérieures du triangles passant respectivement par A, B, C. Soient s_A, s_B, s_C les symétries orthogonales d'axes d_A, d_b, d_C.

• Montrer que S_A envoie la droite (AB) sur la droite (A, C).

• Montrer que la symétrie $S := s_C \circ s_B \circ s_A$ laisse la droite orientée (AC) sur la droite orientée (CA).

• On note par R_O la rotation $s_B \circ s_A$ dont le centre est $O = d_A \cap d_B$. Remarquer alors que $S = S_C \circ R_O$.

• Montrer géométriquement et rapidement que $S = S_C \circ R_O$ est une symétrie non glissée ssi O est sur d_C.

• Expliquer pourquoi à cause du deuxième point, S ne peut pas être une symétrie glissée et conclure que $d_A \cap d_B \cap d_C = \{O\}$.