Université Tours
Département de Mathématiques

License 2ième année
2018–2019

Examen de contrôle continu

Durée : 2h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 (Questions de cours)**.** 1. Montrer le résultat suivant : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ une forme linéaire non-nulle sur E. Alors φ est surjective.

2. Rappeler la définition d'une forme bilinéaire.

3. Montrer que pour toute forme quadratique Φ sur un espace vectoriel E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x \in E, \Phi(x) = \varphi(x,x)$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. On se donne les cinq formes linéaires suivantes :

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = P(-1), \quad \varphi_4(P) = P'(0) \text{ et } \psi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt.$$

On ne demande pas de justifier que ce sont des formes linéaires sur E (!).

1. Montrer que $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ forme une base de E^*.

2. Déterminer la base préduale (P_1, P_2, P_3, P_4) de $\mathcal{B}^*$.

3. Calculer les réels a, b, c, d tels que
$$\psi = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 + d\varphi_4.$$

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$b(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt.$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire.

2. Calculer la matrice de b dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$.

3. Quel est le rang de b ?

4. Donner les parties symétrique et anti-symétrique de b.

5. Donner un exemple de polynôme P pour lequel $b(P,P) > 0$ et un polynôme Q pour lequel $b(Q,Q) < 0$.

Exercice 4. Dans $E = \mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique, on considère l'ensemble F_1 des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ satisfaisant

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ \qquad\qquad x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

1. Justifier que F_1 est un sous-espace vectoriel de E et que $2 \leqslant \dim(F_1) \leqslant 4$.

2. Les vecteurs $u = (1, 2, -1, -2, 0)$ et $v = (-1, 4, 3, 4, 1)$ appartiennent-ils à F_1 ?

3. Déterminer une base de F_1 et en déduire sa dimension.

4. Déterminer un supplémentaire G_1 de F_1 dans E puis en donner un système d'équations.

5. On pose $F_2 = \mathrm{Vect}(u, v)$, où u et v sont les vecteurs définis à la question 2. Déterminer $F_1 \cap F_2$.