

Théorie des langages et automates

TD 4

Grammaires hors-contexte

Exercice 1 Proposez une grammaire hors-contexte pour chaque langage ci-dessous.

1. Les nombres réels positifs sans signe (avec ou sans partie décimale).
2. Les séquences de a et de b formées d'un nombre impair de sous-séquences, où chaque sous-séquence est de la forme $a \dots aab \dots b$ telle que le nombre d' a est un de plus que le nombre de b (dont au moins un a).
3. Le langage $\{0^i 10^j \mid i > j > 0\}$.

Exercice 2 Proposez une grammaire hors-contexte qui engendre le langage reconnu par l'expression régulière $\mathbf{0^*1(0+1)^*}$.

Exercice 3 Proposez une grammaire hors-contexte pour la boucle *while* :

```
while (EXPRESSION)
    INSTRUCTION
```

où INSTRUCTION peut être une seule instruction qui se termine par un point-virgule « ; » ou un bloc de deux ou plusieurs instructions séparées par des point-virgules qui commence par une parenthèse accolade ouvrante « { » et se termine par une parenthèse accolade fermante « } ». (Soient E les expressions et C les instructions seuls.)

Exercice 4 En considérant $T = \{0, 1, (,), +, *, \emptyset, e\}$ comme l'ensemble de symboles utilisés dans les expressions régulières sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et en utilisant e à la place de ϵ , définissez une grammaire hors-contexte, dont l'ensemble de terminaux est T , qui engendre les expressions régulières sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

Exercice 5* Proposez une grammaire contextuelle afin d'engendrer le langage

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 1\}.$$

Exercice 6 Proposez une grammaire hors-contexte qui permet d'engendre le langage reconnu par l'expression régulière $(\mathbf{0+1})^* \mathbf{1(0+01+10)^*}$, puis donnez la dérivation gauche et un arbre de dérivation pour chaque mot ci-dessous.

1. 00101.
2. 1001.
3. 000110.

Exercice 7 Construisez une grammaire hors-contexte pour le langage $\{a^i b^j c^k \mid i > j > 0 \text{ ou } j > k > 0\}$ et puis, selon la grammaire construite, donnez les arbres de dérivation pour les mots $abbc$ et $aaabbc$.

Exercice 8 Soit G une grammaire hors-contexte définie par les productions

$$S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \epsilon.$$

1. Montrez que la grammaire G est ambiguë (trouvez un mot qui possède deux arbres de dérivation).
2. Proposez une grammaire non ambiguë pour le langage $L(G)$.
3. Dessinez l'arbre de dérivation pour le mot retrouvé en question 1.

Exercice 9 Soit G une grammaire hors-contexte dont aucune production ne dérive le symbole terminal ϵ . Montrez que pour tout mot $w \in L(G)$, si $|w| = n$ et w peut se dériver en m étapes, alors l'arbre de dérivation pour w possède $n + m$ nœuds.

Exercice 10 Montrez que les langages ci-dessous ne sont pas hors-contexte.

1. $\{a^i b^j c^k \mid 0 < i < j < k\}$.
2. $\{a^n b^n c^i \mid 0 < i \leq n\}$.
3. $\{a^n b^n c^i \mid 0 < n \leq i \leq 2n\}$.
4. $\{0^i 1^j \mid j = i^2\}$.

Exercice 11 Soient L_1 et L_2 deux langages :

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid m, n \geq 0\},$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid m, n \geq 0\}.$$

1. Montez par les grammaires que L_1 et L_2 sont deux langages hors-contexte.
2. Est-il $L_1 \cap L_2$ un langage hors-contexte? Justifiez votre réponse.