Intégration - TD 1 Compétences attendues :

- *Savoir calculer les bornes* $\sup$ *et* $\inf$ *d'un sous-ensemvle de* $\mathbb{R}$*,* $\limsup$ *et* $\liminf$ *d'une suite de réels*
- *Savoir manipuler les opérations ensemblistes et les fonctions indicatrices d'ensembles*
- *Savoir déterminer l'image réciproque d'un ensemble par une fonction*

Exercice 1. Maximum et valeur absolue Soient x et y deux nombres réels.

1. Démontrer que

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \text{ et } \min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

2. En déduire que $|x| = \max(x,0) - \min(x,0)$.

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. Comparer leurs bornes supérieures et leurs bornes inférieures dans le cas où $A \subset B$.

On note $-A = \{-a,\ a \in A\}$ $\quad A+B = \{a+b,\ a \in A, b \in B\}$ $\quad AB = \{ab,\ a \in A, b \in B\}$.

2. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
3. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?
5. Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles majorées, minorées ? Déterminer leurs bornes supérieures et inférieures.

1. $\{a+bn,\ n \in \mathbb{N}\}$ **2**. $\{a+(-1)^n b,\ n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a+b/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ **4**. $\{(-1)^n a + b/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$
5. $\{a+(-1)^n b/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels croissante. On note $A = \{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\ell = \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Déterminer ℓ.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. En déduire ℓ et démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
3. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [\ell - \varepsilon; \ell]$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$x_n = \inf\{u_p;\ p \geq n\} \text{ et } y_n = \sup\{u_p;\ p \geq n\}.$$

1. A quelles conditions les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles à valeurs dans $\mathbb{R}$?
2. Déterminer les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

$$\textbf{a}.\ u_n = (-1)^n \quad \textbf{b}.\ u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3. Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   On notera $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \liminf u_n \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = \limsup u_n \in \overline{\mathbb{R}}$.
4. Démontrer que $\alpha \leq \beta$.
5. Démontrer que si $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
6. Démontrer que si $\alpha = +\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Que se passe-t-il si $\beta = -\infty$?
7. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\alpha \leq \ell \leq \beta$.
8. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}?}$ est égal à $[\alpha, \beta]$.

Exercice 5. Soient A, B et C trois ensembles. Établir les résultats suivants :

$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$, $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$, $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.

Exercice 6. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble F. Établir les résultats suivants :

$$F \setminus \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(F \setminus B_i), \quad F \setminus \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(F \setminus B_i).$$

Exercice 7. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Pour chacune des applications suivantes, dire si c'est l'indicatrice d'une partie et préciser cette partie le cas échéant.

$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B, \quad \left|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\right|, \quad \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B, \quad \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B), \quad \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B).$$

Exercice 8. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties d'un ensemble E : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.

1. Vérifier que la suite de fonctions $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers une fonction f définie sur E.
2. Montrer que f est l'indicatrice d'une partie que l'on précisera.

Exercice 9. Soient E et F deux ensembles. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de F. Soit B une partie de F. Soit $f : E \to F$ une application. Établir les résultats suivants :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B).$$

Que se passe-t-il si on considère des images directes au lieu de considérer des images réciproques ?

Exercice 10.

1. Expliciter les images réciproques des ensembles
$$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, [1, +\infty[\text{ et } [-64, 64[$$
par les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
2. Décrire l'image réciproque de $[1, 2]$ par l'application $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Expliciter $s^{-1}(\{0, 1\})$ où $s : \{0, 1\}^4 \to \mathbb{Z}$ est définie par $s(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Exercice 11. L'image réciproque d'un ensemble fini par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il toujours un ensemble fini ?

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles finis. Soit $f : E \to F$ une application. A-t-on

$$\forall B \in F, \operatorname{card}\big(f^{-1}(B)\big) \leq \operatorname{card}(B) \implies f \text{ injective ?}$$

A-t-on la réciproque ?

CC octobre 2023 : Questions de cours et de TDs

Soient E et F deux ensembles, A une partie de E et B une partie de F. Soit $f : E \to F$ une application.

1. *Définir $f^{-1}(B)$ et $f(A)$.*
2. *Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de F. Montrer que $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$..*
3. *On considère à présent une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E. A-t'on*
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)? \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)?$$
(si la réponse est "oui", on argumentera avec précision, si c'est "non" on donnera un contre-exemple)