L2S4 MATHS|CHAPITRE 0

RÉVISION

Contenu du chapitre

FEUILLE D'EXERCICES 0

L2S4 MATHS| RÉVISION

I). Opérations Basiques sur les matrices

Exercice 0.1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits Av et Aw.
2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont v et w. Calculer le produit AB. Que remarquez-vous ?

3. Calculer le produit BA. Que remarquez-vous ?

Exercice 0.2

Calculer les produits matriciels suivants.

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée "identité" et est notée I_2.

2.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
On dit que ces deux matrices commutent.

3.
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$
On dit que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau (noté "Ker") de la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

II). Déterminant d'une matrice

Exercice 0.3

Calculer les déterminants suivants :
$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$, $\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$, $\delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$.
Que remarquez-vous à propos de $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ et δ_5 ?

NOTE 1

On rappelle que :
- si l'on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe ;
- si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul ;
- on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant ;
- si l'on multiplie tous les termes d'une même ligne ou d'une même colonne par un réel k, le déterminant est multiplié par k ;
- en conséquence, si une ligne ou une colonne est nulle, le déterminant est nul. Enfin, le déterminant se comporte bien avec le produit des matrices : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exercice 0.4

1. Calculer le déterminant suivant (on peut le faire via trois méthodes) :
$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. En déduire, en utilisant uniquement les propriétés du déterminant et sans nouveau calcul de déterminant, la valeur des déterminants suivants :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 30 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Exercice 0.5

Calculer les déterminants suivants :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \quad \delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

III). Rang et noyau d'une matrice

Exercice 0.6

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer le rang de A et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ en utilisant le théorème du rang.
3. Calculer $\mathrm{Ker}(A)$; en donner une base.
4. Mêmes questions avec les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & -8 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

IV). Inverse d'une matrice

Exercice 0.7

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 0.8

Inverser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-5 & 1 & -3\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$
$$C=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -5 & 4 & 2\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

V). Racines et factorisation d'un polynôme

Exercice 0.9

1. Donner les racines réelles des polynômes suivants et les factoriser :

$$P(X)=X^2+X-6,\quad Q(X)=X^2-8X+16,\quad R(X)=X^2+2X+2.$$

2. Factoriser le polynôme

$$P(X)=X^4-2X^3+X$$

3. On considère le polynôme

$$P(X)=X^5-X^4-X^3-X^2+4X-2.$$

   Montrer que 1 est racine triple de P. En déduire une factorisation de P.

VI). Applications linéaires et représentation

Exercice 0.10

Soit f l'application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,2x_1+x_2-3x_3,-x_2+2x_3)$$

Et soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1),f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Représenter f dans la base canonique.

L2S4 MATHS|CHAPITRE 1

VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

I). Définitions

Définition 1. Valeurs propres – vecteurs propres – espaces propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit qu'un réel λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $Av = \lambda v$.
- Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $Av = \lambda v$ s'appelle un vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ.
- L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ appelé sous espace propre et noté E_λ.

EXEMPLE : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

- $\lambda = 2$ est valeur propre de A car il existe un vecteur non-nul $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $Av = 2v$. Par exemple, $v = (1, 1)$:
$$Av = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v.$$
- Le vecteur $v = (1, 1)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.
- Le vecteur v est dans le sous espace propre E_2. Comme E_2 est un espace vectoriel, le vecteur $w = 4v$ est aussi un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 :
$$Aw = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 2w.$$

Comment fait-on pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice ?

Proposition 1.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. On a

$$\begin{aligned} v \in E_\lambda &\iff Av = \lambda v && \text{(définition de } E_\lambda \text{)}\\ &\iff Av - \lambda v = 0 \\ &\iff (A - \lambda \mathrm{I}_n)\, v = 0 \\ &\iff v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) \quad \text{(définition de Ker).} \end{aligned}$$

□

On en déduit que λ est valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur non-nul dans $\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$, c'est à dire que $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.

Définition 2. Polynôme caractéristique

On note $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$. On appelle P_A le polynôme caractéristique de A.

Proposition 1.2.

Les valeurs propres de A sont les racines de P_A.

Démonstration. λ est valeur propre de A si, et seulement si il existe un vecteur non-nul dans $\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$, ce qui équivaut à $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$, c'est-à-dire $P_A(\lambda) = 0$. □

Exemple : On considère encore la matrice de l'exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_2) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 \\ 10 & -8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda) \times (-8-\lambda) - 10 \times (-5) \\ &= -56 - 7\lambda + 8\lambda + \lambda^2 + 50 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Les racines de P_A sont $\lambda = 2$ et $\lambda = -3$. Les valeurs propres de A sont donc $\lambda = 2$ et $\lambda = -3$.

Une fois les valeurs propres λ déterminées, il ne reste plus qu'à déterminer les vecteurs propres en cherchant une base de $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$.

Exemple : Toujours avec la matrice A de l'exemple 1,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$$

on a vu que $\lambda = -3$ est valeur propre de A. Déterminons le sous-espace propre E_{-3} : soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} v \in E_{-3} \iff v \in \operatorname{Ker}(A - (-3)\mathrm{I}_2) &\iff (A - (-3)\mathrm{I}_2)\, v = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\iff \begin{pmatrix} 7-(-3) & -5 \\ 10 & -8-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 10x - 5y = 0 \\ 10x - 5y = 0 \end{cases} \\ &\iff y = 2x. \end{aligned}$$

En prenant x comme variable libre, on a donc

$$E_{-3} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Nous avons tout ce qu'il faut pour résoudre l'exercice-type suivant :

Exercice 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculez les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Solution :

— **Calcul du polynôme caractéristique :** On a

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathrm{I}_3) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \times \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\left(-2\lambda + \lambda^2 + 1\right) - (-2 + \lambda + 1) - (1 - \lambda) \\
&= -4\lambda + 2\lambda^2 + 2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda + 2 - \lambda - 1 - 1 + \lambda \\
&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.
\end{aligned}$$

— **Recherche des racines de P_A :** On cherche une racine évidente. $P_A(1) = 0$ donc 1 est racine de P_A. On regarde si 1 est racine multiple :

$$P_A'(\lambda) = -3\lambda^2 + 8\lambda - 5$$

$P_A'(1) = 0$ donc 1 est racine double (au moins).

$$P_A''(\lambda) = -6\lambda + 8$$

$P_A''(1) = 2 \neq 0$ donc 1 est racine de multiplicité 2 . On factorise donc $P_A(\lambda)$ par$(\lambda - 1)^2$ en posant la division :

$$\begin{array}{r|l}
-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ \cline{2-2}
\lambda^3 - 2\lambda^2 \ \ + \lambda \quad\quad & -\lambda + 2 \\ \cline{1-1}
2\lambda^2 - 4\lambda + 2 & \\
-2\lambda^2 + 4\lambda - 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

donc

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(2 - \lambda)$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ de multiplicité 2 et $\lambda = 2$ de multiplicité 1.

— **Calcul des sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}\,(A - I_3)$:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - y - z & = 0 \\ x - y - z & = 0 \\ -x + y + z & = 0 \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow x = y + z.$$

On prend y et z comme variables libres et on écrit que les solutions sont de la forme

$$v = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient une base de E_1 :

$$\text{Vect}(E_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

— **Calcul des sous-espaces propres** $E_2 = \text{Ker}\,(A - 2I_3)$ **:**

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x - 2y - z = 0 \\ -y - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -z \\ x = -z \end{array} \right.$$

On prend z comme variable libre et on écrit que les solutions v sont de la forme

$$v = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on obtient une base de E_2 :

$$\text{Vect}(E_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On remarque sur cet exemple que $\lambda = 1$ était de multiplicité 2 et que E_1 était de dimension 2 (base constituée de deux vecteurs). De même, $\lambda = 2$ était de multiplicité 1 et $\dim E_2 = 1$. Ce n'est pas complètement un hasard, mais il n'y a pas toujours égalité. Le résultat général est le suivant :

Théorème 1.

Si λ est une valeur propre de multiplicité k, alors

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq k.$$

En particulier, si λ est une valeur propre simple ($k = 1$), alors $\dim E_\lambda = 1$.

Remarquons également qu'aucun vecteur de E_1 ne peut être colinéaire à un vecteur de E_2. Autrement dit, la famille de vecteurs

$$(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } E_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } E_2})$$

forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ tout entier.
On reviendra sur cette remarque au chapitre suivant.