CC1 Analyse 4 durée : 2h

Les calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n \cos x}{\sqrt{n^2 + x^2}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f qu'on déterminera .
2. En utilisant la suite $x_n = 2n\pi$, montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.
3. Dans cette question on se propose de montrer que la la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, M]$, pour tout $M > 0$. On rappel l'inégalité :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ 0 < a \leq b, \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(b - a)$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^2}{2n^2}.$$

   (b) Conclure.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx$.

Exercice 2. Pour tout n $\in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   On désigne par $f(x)$ sa somme.
2. (a) Déterminer $\displaystyle\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$. La convergence de la série est-t-elle normale sur $[0, +\infty[$?
   (b) Montrer que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$
3. Calculer $\displaystyle\int_1^x f(t)\, dt$, $x > 0$. Utiliser l'identité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$, valable pour tout $|q| < 1$.
   En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{xe^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2})^2}.$$

4. Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$. En déduire que la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   On désigne par $f(x)$ sa somme.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[0, a]$.
3. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que
$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}.$$