UNIVERSITÉ DE TOURS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Licence 2ième année
2020–2021

Examen de contrôle continu 2

Durée : 2h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

1. Rappeler la définition de l'adjoint d'un endomorphisme $f \in L(E)$.
2. Montrer que $f \in L(E)$ est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle = 0$.
3. Montrer que toute famille orthogonale $(u_1, \dots, u_k)$ dont chacun des vecteurs est non nul forme une famille libre.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de la forme bilinéaire symétrique

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Trouver l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de la famille $(1, X, X^2)$.
3. En déduire le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$.
4. Quelle est la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 3. Sur l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère l'hyperplan

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

1. Déterminer $H^\perp$.
2. Donner la matrice de la projection orthogonale p_H dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire celle de s_H, la symétrie orthogonale par rapport à H.
3. Calculer la distance $d(e_1, H)$ du vecteur e_1 à H.

Exercice 4. Diagonaliser en base orthonormée l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel) dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme orthogonal.
2. Montrer que 1 est la seule valeur prore réelle de u.
3. Construire une base orthonormée du sous-espace propre $E_1(u)$.
4. Construire une base orthonormée de $E_1(u)^\perp$.
5. Soit $\mathcal{B}$ la base obtenue en accollant les deux bases trouvées aux questions précédentes. Quelle est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$?