Analyse 3

Laurent Mazet

Chapitre 1

Compléments sur les suites

Dans ce chapitre nous donnons des compléments à l'étude des suites développée en L1. Nous considérons dans ce cours des suite réelles et complexes : $u_n \in \mathbb{R}$ ou $u_n \in \mathbb{C}$.

1.1 Rappels du cours précédent

Nous rappelons rapidement quelques éléments du cours de L1.

Tout d'abord, par définition, une suite est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Usuellement le nombre $u(n)$ est notée u_n et la suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_n$ ou encore (u_n). On appelle aussi suite une application définie sur $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0\}$ notée $(u_n)_{n\geq n_0}$. Le cours de L1 dont nous allons rappeler les notions se focalise sur les suites réelles. Certaines de ces notions se généralisent aux suites complexes en remplaçant la valeur absolue par le module.

- Une suite réelle $(u_n)_n$ est majorée (resp. minorée) si il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$).
- Une suite $(u_n)_n$ est bornée si il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.
- Une suite réelle $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$).
- Une suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

  Si un tel ℓ existe, il est unique et on écrit $\lim u_n = \ell$ ou encore $u_n \to \ell$. Si une suite ne converge pas vers une limite ℓ, on dit que la suite diverge.
- Une suite réelle $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

  $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M \text{ (resp. } u_n \leq M)$$

  Dans ce cas, on écrit $\lim u_n = +\infty$ ou encore $u_n \to +\infty$. Un suite qui tend vers $\pm\infty$ est une suite qui diverge.

Définition 1.1.1. Soit $(u_n)_n$ une suite. Une sous-suite de (u_n) ou suite extraite de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Proposition 1.1.2. *Soit (u_n) une suite, on a équivalence entre les deux assertions suivantes*

(i) $\lim u_n = \ell$.

(ii) toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) vérifie $\lim u_{\varphi(n)} = \ell$.

1.2 Comparaisons des suites et des fonctions

Notations de Landau et développement asymptotique

Nous introduisons des terminologies et des notations qui permettent de comparer deux fonctions f et g définies sur $X = \mathbb{N}$ ou $X = [a, +\infty[$ près de $+\infty$. Le cas $X = \mathbb{N}$ est en fait celui des suites.

- On dit que f et g sont équivalentes en $+\infty$, noté $f \sim_{+\infty} g$ si il existe une fonction h vérifiant $\lim_{+\infty} h = 1$ telle que $f = hg$.
- On dit que f est négligeable par rapport à g en $+\infty$, noté $f = o_{+\infty}(g)$ (on lit « f est un petit o de g ») si il existe une fonction h vérifiant $\lim_{+\infty} h = 0$ telle que $f = hg$.
- On dit que f est dominée par g en $+\infty$, noté $f = O_{+\infty}(g)$ (on lit « f est un grand o de g ») si il existe une fonction h bornée telle que $f = hg$.

Dans les trois cas, il suffit que h soit définie sur $\{n, n \geq n_0\}$ ou $[b, +\infty[$ avec $b > a$.

Remarque. Comme $f \sim_{+\infty} g$ correspond à $f = hg$ avec $\lim_{+\infty} h = 1$, on peut réécrire $f = hg = g + (h-1)g = g + o_{+\infty}(g)$ puisque $\lim_{+\infty} h - 1 = 0$. Ainsi on a

$$f \sim_{+\infty} g \iff f = g + o_{+\infty}(g)$$

Exemple. Un exemple de comparaison en $+\infty$ est donné par les fonctions puissances :

$$\boxed{x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta), \text{ si } \alpha < \beta}$$

En effet $x^\alpha = x^{\alpha-\beta} x^\beta$ et, comme $\alpha - \beta < 0$, $\lim_{+\infty} x^{\alpha-\beta} = 0$.

On rappelle certaines des propriétés de ces notions de comparaisons.

Proposition 1.2.1. *Soit f, g et h trois fonctions définies sur X.*

- *Si g n'est jamais nulle au voisinage de $+\infty$, on a*

$$\begin{aligned} f \sim_{+\infty} g &\iff \lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 1 \\ f = o_{+\infty}(g) &\iff \lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 0 \\ f = O_{+\infty}(g) &\iff \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } +\infty \end{aligned}$$

- *On a aussi*

$$\begin{aligned} f = o_{+\infty}(g) &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in X, (x \geq b) \implies |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \\ f = O_{+\infty}(g) &\iff \exists M, b \in \mathbb{R}, \forall x \in X, (x \geq b) \implies |f(x)| \leq M|g(x)| \end{aligned}$$

- *Si $f = o_{+\infty}(g)$ et $h = o_{+\infty}(g)$ alors $\lambda f + \mu h = o_{+\infty}(g)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*
- *Si $f = O_{+\infty}(g)$ et $h = O_{+\infty}(g)$ alors $\lambda f + \mu h = O_{+\infty}(g)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*
- *Si $f = o_{+\infty}(g)$, alors $f = O_{+\infty}(g)$.*
- *Si $f \sim_{+\infty} g$, alors $f = O_{+\infty}(g)$.*
- *$\sim_{+\infty}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies sur X.*
- *Si $f = o_{+\infty}(g)$ et $g = o_{+\infty}(h)$, alors $f = o_{+\infty}(h)$.*
- *Si $f = O_{+\infty}(g)$ et $g = O_{+\infty}(h)$, alors $f = O_{+\infty}(h)$.*
- *Si $f = o_{+\infty}(g)$ et $g = O_{+\infty}(h)$, alors $f = o_{+\infty}(h)$. Si $f = O_{+\infty}(g)$ et $g = o_{+\infty}(h)$, alors $f = o_{+\infty}(h)$.*
- *On a*

$$\begin{aligned} f = o_{+\infty}(g) &\implies fh = o_{+\infty}(gh) \\ f = O_{+\infty}(g) &\implies fh = O_{+\infty}(gh) \\ f \sim_{+\infty} g &\implies fh \sim_{+\infty} gh \end{aligned}$$

Démonstration. La plupart des ces propriétés se démontre aisément en utilisant la définition. Par exemple, la première revient à poser $h = f/g$.

Pour la seconde. Supposons $f = o_{+\infty}(g)$, écrivons donc $f = hg$ avec $\lim_{+\infty} h = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc b tel que pour $x \geq b$, $|h(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi pour $x \geq b$, $|f(x)| = |h(x)||g(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$. Réciproquement, définissons

$$h(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) \text{ si } g(x) \neq 0 \\ 0 \text{ si } g(x) = 0 \end{cases}$$

On sait qu'il existe $b > 0$ tel que si $x \geq b$ on a $|f(x)| \leq |g(x)|$. Ainsi si $g(x) = 0$ on a $f(x) = 0$. On en déduit que pour $x \geq b$ on a bien $f(x) = h(x)g(x)$. Maintenant il reste à montrer que $\lim_{+\infty} h = 0$. Fixons donc ε, on sait qu'il existe b tel que, pour $x \geq b$, $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$. Ainsi si $g(x) \neq 0$, on a $|h(x)| \leq \varepsilon$. Si $g(x) = 0$, on a $h(x) = 0$ et donc aussi $|h(x)| \leq \varepsilon$. On a bien $h \to 0$ et $f = o_{+\infty}(g)$. □

Exemple. Considérons par exemple la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ et cherchons un équivalent « simple ». Comme $\lim (-1)^n/n = 0$, on peut écrire $u_n = n + o(n) = n(1 + o(1))$ ou encore $u_n \sim n$. On peut aussi écrire $u_n/n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \to 1$ donc $u_n \sim n$.

Comparaisons des fonctions et suites usuelles

Pour pouvoir utiliser les comparaisons de fonctions il faut connaître quelques cas classiques.

Lemme 1.2.2. *On a* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Démonstration. Si on dérive $\frac{\ln x}{x}$, on a $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$ qui est négatif pour $x \geq e$. Ainsi $\frac{\ln x}{x}$ est positive et décroissante pour $x \geq e$. Il existe donc $\ell \geq 0$ tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \ell$.

On a $\frac{\ln(2x)}{2x} = \frac{1}{2}\frac{\ln 2 + \ln x}{x}$. L'expression de gauche tend vers ℓ et celle de droite vers $\ell/2$ donc $\ell = \ell/2$ ce qui donne $\ell = 0$. □

Si $\alpha > 0$ et $a > 1$, on a $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ ainsi le calcul de $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}$ relève d'une forme indéterminée. En fait on a $\frac{x^\alpha}{a^x} = e^{\alpha \ln x - x \ln a} = e^{x(-\ln a + \alpha \frac{\ln x}{x})}$. D'après le lemme, $-\ln a + \alpha \frac{\ln x}{x} \to -\ln a < 0$. Donc $\lim_{+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$. Ainsi on peut écrire

$$\boxed{x^\alpha = o_{+\infty}(a^x), \text{ si } \alpha > 0 \text{ et } a > 1}$$

On dit que les exponentielles l'emportent sur les fonctions puissances.

Soit $\beta > 0$. Notons que $x^\beta = e^{\beta \ln x} = (e^\beta)^{\ln x}$. Comme $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$, la comparaison ci-dessus donne

$$\boxed{(\ln x)^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta), \text{ si } \alpha, \beta > 0}$$

On dispose d'un outil spécifique pour les suites.

Proposition 1.2.3. *Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites ne s'annulant pas. On suppose que, à partir d'un certains rang, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|}$. Alors $u_n = O(v_n)$.*

De plus si $\lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\frac{|v_n|}{|v_{n+1}|} = \ell < 1$, on a $u_n = o(v_n)$.

Démonstration. Soit n_0 un rang à partir duquel l'inégalité est satisfaite. On peut alors écrire

$$u_n = u_{n_0} \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} = u_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \quad \text{et} \quad v_n = v_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$$

Ainsi d'après l'inégalité $|u_n| \leq \frac{|u_{n_0}|}{|v_{n_0}|} |v_n|$ et donc $u_n = O(v_n)$.

Pour le second résultat, on considère q tel que $\ell < q < 1$. On a alors à partir d'un certain rang $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\frac{|v_n|}{|v_{n+1}|} < q$ ou encore $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \frac{|q^{n+1}v_{n+1}|}{q^n|v_n|}$. D'après ce qui précède on a donc $u_n = O(q^n v_n) = v_n O(q^n) = v_n o(1) = o(v_n)$. □

Corollaire 1.2.4. *Soit $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$. On a les comparaisons suivantes*

$$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \quad n^\beta = o(a^n), \quad a^n = o(n!) \quad \textit{et} \quad n! = o(n^n)$$

Démonstration. Les deux premiers sont des réécritures pour les suites des comparaisons ci-dessus. Pour les dernières, on a

$$\frac{a^{n+1}}{a^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \to 0$$

$$\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{-1+o(1)} \to e^{-1} < 1$$

Ceci nous permet de conclure d'après la proposition ci-dessus. □

On finit par donner un équivalent de $n!$. Il s'agit de la formule de Stirling

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$$

Développement limité et comparaison en d'autre point

Dans la preuve ci-dessus, nous avons écrit $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, pour cela nous avons utilisé le DL $\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. En fait on peut réécrire ce DL en utilisant aussi les notations de Landau.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a. On dit que f est négligeable par rapport à g en a, noté $f = o_a(g)$ si il existe une fonction h vérifiant $\lim_a h = 0$ telle que $f = hg$.

Ainsi l'expression $x\varepsilon(x)$ du DL ci-dessus vérifie $x\varepsilon(x) = o_0(x)$ et le DL peut être réécrit $\ln(1+x) = x + o_0(x)$. Les propriétés développées au voisinage de $+\infty$ pour les « petits o » sont aussi valables en a. De même, on peut introduire les notations de O_a et $\sim_a$ qui fonctionnent de façon similaire.

Exemple. Si $\alpha > \beta \in \mathbb{R}$, on a $(x-a)^\alpha = o_a((x-a)^\beta)$

La comparaison des fonctions ln et puissance en 0 peut aussi être intéressante. En posant $x = \frac{1}{u}$ et en utilisant les comparaisons précédentes, on obtient qu'en 0

$$\boxed{(\ln x)^\alpha = o_0(\frac{1}{x^\beta}), \text{ si } \alpha, \beta > 0}$$

Faisons quelques rappels concernant les développements limités. On commence par rappeler la définition.

Définition 1.2.5. Soit f une fonction définie au voisinage de a et n un entier. On dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n, si il existe un polynôme P de degré au plus n tel que $f(x) = P(x-a) + o_a((x-a)^n)$.

Théorème 1.2.6 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^n et $a \in I$. f admet alors un développement limité en a à l'ordre n. De plus ce DL a pour expression*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$$

Ci-dessous on trouvera une liste de développements limités en 0 qui sont à connaître.

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1})$
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n})$
- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+1})$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_0(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o_0(x^n)$

Exemple. Déterminons un équivalent de $u_n = e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{\ln n}}$. En utilisant des développements limités classiques, on a

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + \frac{1}{\ln n}} = 1 + \frac{1}{2\ln n} + o(\frac{1}{\ln n})$$

Ainsi en sommant les deux expressions, on obtient $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\ln n} + o(\frac{1}{\ln n}) + o(\frac{1}{n})$. Comme $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\ln n})$, on obtient $u_n = -\frac{1}{2\ln n} + o(\frac{1}{\ln n})$. Ainsi $u_n \sim -\frac{1}{2\ln n}$.

1.3 Suites de Cauchy

Définition 1.3.1. Soit $(u_n)_n$ une suite. On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si la propriété ci-dessous est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ (n, m \geq n_0) \implies |u_n - u_m| \leq \varepsilon$$

De façon informelle, une suite est de Cauchy si les termes de la suite pour n grand sont « proches » les uns des autres.

Exemple. La suite $(\frac{1}{n})_n$ est de Cauchy, en effet si $n \leq m$ on a $|u_n - u_m| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m-n}{mn} \leq \frac{m}{mn} = \frac{1}{n}$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, si $\frac{1}{\varepsilon} \leq n \leq m$ on a $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

La suite $(\sqrt{n})_n$ n'est pas de Cauchy, en effet $|u_{2n} - u_n| = \sqrt{2n} - \sqrt{n} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Toutefois on a $|u_{n+1} - u_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. En conséquence les termes consécutifs de la suite sont aussi proches que l'on veut sans que la suite soit de Cauchy : l'écart entre u_n et u_m est grand lorsque celui entre n et m l'est.

On a la propriété suivante

Proposition 1.3.2. *Soit $(u_n)_n$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors (u_n) est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u_n = \ell$ on sait qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que, pour $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi si $n, m \geq n_0$ on a

$$|u_n - u_m| = |(u_n - \ell) - (u_m - \ell)| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

1.4 Limite supérieure et inférieure

1.4.1 Définitions et propriétés

Si $(u_n)_n$ est une suite réelle, on sait que cette suite peut ne pas avoir de limite finie (par exemple, $u_n = (-1)^n$). Toutefois on peut donner un sens à sa « plus grande limite possible » et sa « plus petite limite possible ».

Considérons donc u_n une suite réelle et définissons

$$U_n = \sup_{k\geq n} u_k = \sup\{u_k, k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

On constate que la suite $(U_n)_n$ est décroissante (une fois la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ étendue $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) ; en effet on a

$$U_{n+1} = \sup_{k\geq n+1} u_k \leq \sup_{k\geq n} u_k = U_n$$

Toute suite décroissante admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et cette limite est $\lim U_n = \inf_n U_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.4.1. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On définit sa limite supérieure par

$$\limsup u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} u_k\big) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

On définit sa limite inférieure par

$$\liminf u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geq n} u_k\big) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Les limites supérieures et inférieures sont parfois notées $\limsup = \overline{\lim}$ et $\liminf = \underline{\lim}$.

Exemple. Si $(u_n)_n = ((-1)^n)_n$, on a $U_n = \sup_{k\geq n}(-1)^k = 1$. Donc $\limsup(-1)^n = 1$. On a aussi $\inf_{k\geq n}(-1)^k = -1$, donc $\liminf(-1)^n = -1$.

Considérons l'exemple $(u_n)_n = (3 + \frac{(-1)^n}{n})_{n\geq 1}$. On a alors

$$\sup_{k\geq n} u_k = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 + \frac{1}{n+1} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi $\limsup u_n = 3$. On a de même $\liminf u_n = 3$.

Proposition 1.4.2. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On a les propriétés suivantes*

- *On a* $\liminf u_n \leq \limsup u_n$.
- $(u_n)_n$ *tend vers ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si* $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$.
- *Si $(u_{\varphi(n)})_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$ qui admet une limite, on a* $\liminf u_n \leq \lim u_{\varphi(n)} \leq \limsup u_n$.
- *Il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ de $(u_n)_n$ qui vérifie,* $\lim u_{\varphi(n)} = \limsup u_n$. *De même pour* $\liminf u_n$

Démonstration. Pour la première propriété, on note que, pour tout n, $\inf_{k\leq n} u_k \leq \sup_{k\leq n} u_k$. Ainsi par passage à la limite, on a $\liminf u_n \leq \limsup u_n$.

Pour le second point. Notons que, pour tout n, $\inf_{k\leq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k\leq n} u_k$. Ainsi si $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$, le théorème des gendarmes affirme que $\lim u_n = \ell$. Réciproquement, supposons $\lim u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. Ainsi pour $n \geq n_0$,

$$\ell - \varepsilon \leq \inf_{k\geq n} u_k \leq \sup_{k\geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon$$

Par passage à la limite, ceci donne $\ell - \varepsilon \leq \liminf u_n \leq \limsup u_n \leq \ell + \varepsilon$. En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$. Si $\ell = \pm\infty$, la preuve fonctionne de façon similaire.

Pour le troisième point, on a $\inf_{k\geq\varphi(n)} u_k \leq u_{\varphi(n)} \leq \sup_{k\geq\varphi(n)} u_k$; par passage à la limite, on obtient $\liminf u_n \leq \lim u_{\varphi(n)} \leq \limsup u_n$.

Pour le dernier point, supposons que $\ell = \limsup u_n \in \mathbb{R}$. On va construire par récurrence une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$, vérifiant $\ell - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq \ell + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. On pose $\varphi(0) = 0$ et, pour $n \geq 0$ fixé, on suppose que $\varphi(k)$ est construit pour $k \leq n$. Comme

$\ell = \limsup u_n$, il existe k_0 tel que, pour $k \geq k_0$, $\ell \leq \sup_{i\geq k} u_i \leq \ell + \frac{1}{n+1}$. Considérons $k_1 \geq \max(k_0, \varphi(n)+1)$. Par définition du sup, il existe alors $i_0 \geq k_1$ tel que $\sup_{i\geq k_1} u_i \leq u_{i_0} + \frac{1}{n+1}$. En combinant ces deux inégalités, on obtient $\ell - \frac{1}{n+1} \leq u_{i_0} \leq \ell + \frac{1}{n+1}$. Comme, $i_0 \geq \varphi(n)+1$, $\varphi(n+1) = i_0$ vérifie les propriétés souhaitées. Ceci achève la construction de φ. L'encadrement $\ell - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq \ell + \frac{1}{n}$ implique que $\lim u_{\varphi(n)} = \ell = \limsup u_n$.

Si $\ell = +\infty$, on construit φ de la même façon de sorte que $u_{\varphi(n)} \geq n$. Si $\ell = -\infty$, $\lim u_n = -\infty$ donc la sous-suite est $(u_n)_n$ elle-même. □

Voici quelques propriétés des limites supérieures et inférieures dont les démonstrations sont laissées au lecteur.

Proposition 1.4.3. *Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles et λ un réel strictement positif. On a*

- $\liminf u_n = -\limsup(-u_n)$.
- $\limsup(\lambda u_n) = \lambda \limsup u_n$ *et* $\liminf(\lambda u_n) = \lambda \liminf u_n$.
- $\limsup(u_n+v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$ *et* $\liminf(u_n+v_n) \geq \liminf u_n + \liminf v_n$

On pourra chercher un exemple où l'on n'a pas égalité dans les inégalités du dernier point.

1.4.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.4.4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $(u_n)_n$ est bornée, il existe alors une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge.*

Démonstration. Supposons que la suite est réelle. Comme $(u_n)_n$ est bornée, $\limsup u_n = \ell \in \mathbb{R}$. D'après la Proposition 1.4.2, il existe alors une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers ℓ.

Si la suite est complexe, on décompose en partie réelle et imaginaire : $u_n = a_n + ib_n$. Comme $(u_n)_n$ est bornée, la suite réelle $(a_n)_n$ est bornée. Il existe donc une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_n$ qui converge. La suite $(b_{\varphi(n)})_n$ est alors bornée donc il existe une sous-suite $(b_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ qui converge. Ainsi la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ converge dans $\mathbb{C}$. □

1.5 Retour sur les suites de Cauchy

Proposition 1.5.1. *Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. Tout d'abord il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|u_n - u_{n_0}| \leq 1$. Ainsi la suite $(u_n)_n$ est bornée et par le théorème de Bolzano-Weierstrass 1.4.4 il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite est de Cauchy, il existe n_0 tel que pour $n, m \geq n_0$ $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour $n, m \geq n_0$, $|u_n - u_{\varphi(m)}| \leq \varepsilon$. En faisant tendre $m \to \infty$, on obtient, pour $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$; ainsi $u_n \to \ell$. □