Université de Tours 2019-2020

L2-S3 UE 3-1 Algèbre

Feuille d'exercices 3

Exercice 1

Vérifier que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel à préciser puis donner une base et la dimension de chacun d'eux :

$$E = \{(x, x, y, y, z) \ : \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \qquad F = \{a + aX + aX^3 + bX^5 \ : \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \left\{ \begin{array}{ll} x + z & = 0 \\ y + t & = 0 \end{array} \right. \right\} \qquad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \ : \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$I = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ f(x) = ae^x + bx, \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -1, 0, 2), \ u_2 = (2, 1, 3, 1), \ u_3 = (4, 5, 9, -1), \ v_1 = (1, 1, 1, 1), \ v_2 = (0, 1, 0, 0)\cdot$$

1. Définir $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, puis en donner une base et un système d'équations.
2. Donner une base de $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ puis définir l'un de ses supplémentaires dans E, qu'on notera G_1, ainsi qu'un système d'équations qui le définit.
3. Définir $F + G$ puis en donner une base.
4. Prouver que $F \cap G$ est une droite vectorielle de E dont on donnera un vecteur directeur.

Exercice 3

Considérons les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par:

$$F = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)\right), \ G = \mathrm{Vect}\left((1, -2, 1, 2), (2, 1, -2, 1), (-4, -7, 8, 1)\right)\cdot$$

Déterminer une base de : F, G, $F \cap G$, $F + G$. Avons-nous $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

Exercice 4

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_3 = 0 \text{ et } \ x_2 + x_4 = 0\}$.
Soient $u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1, -1), u_3 = (1, 0, 1, 0)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F.
3. Donner une ou plusieurs équations qui caractérisent F.
4. Donner une famille génératrice de $E + F$.
5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Exercice 5

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,3,-2,2,3)$, $v_2 = (2,7,-5,6,5)$ et $v_3 = (1,2,-1,0,4)$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par $w_1 = (1,3,0,2,1)$, $w_2 = (2,7,-3,6,3)$ et $w_3 = (1,1,6,-2,-1)$.

1. Déterminer une base de F, une base de G, une base de $F+G$ et une base de $F \cap G$.
2. Déterminer les équations de $F+G$.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et ${}^tA$ la matrice dont les lignes sont les colonnes de A.
Par exemple,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

${}^tA$ est dite *transposée* de A. On dit que A est *symétrique* (resp. *anti-symétrique*) si ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$).

1. Montrer que les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ pour $n = 3$. Généraliser à n quelconque.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7

Soient $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+z-t = 0 \text{ et } x-2y+2z+t = 0 \text{ et } x-y+z = 0\}$ et
$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x+6y+7z-t = 0\}$.
Soient $a = (2,1,-1,2), b = (1,1,-1,1), c = (-1,-2,3,7), d = (4,4,-5,-3)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels.
4. Déterminer une base de F .
5. Est-ce-que $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?
6. Montrer que $F = \text{Vect}(b,c,d)$.
7. Soit $u = (x,y,z,t) \in F$; exprimer u comme une combinaison linéaire de b, c et d.