CHAPITRE 0 - REVISIONS

LOIS DE PROBABILITE USUELLES

Dans tout ce chapitre, on suppose donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et on étudie des variables aléatoires définies sur l'univers Ω associé.

I Lois discrètes

1) Loi discrète uniforme

Définition :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi discrète uniforme si et seulement si :
(1) $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, où n est un entier naturel non nul
(2) $P(X = k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$
On a alors :

$$\boxed{E(\mathrm{X}) = \frac{n+1}{2}, V(X) = \frac{n^2-1}{12}, \sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}}$$

Rappel : savoir tracer l'histogramme et la courbe représentative de la fonction de répartition.

Exemple :
On lance un dé cubique non pipé, et X désigne le numéro de la face qui apparaît lors du lancer. Cette variable suit une loi discrète uniforme associée à la valeur $n = 6$. On a, pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$; les caractéristiques de cette loi sont :

$$E(\mathrm{X}) = \frac{7}{2}, V(X) = \frac{35}{12} \approx 2.92, \sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71$$

2) Loi de Bernoulli

Définition :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi de Bernoulli si et seulement si :
(1) $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
(2) $P(X = 1) = p$ où $\in]0, 1[$ et donc $P(X = 0) = 1 - p$, noté q.
On note cette loi par : $X \leadsto \mathcal{B}(1, p)$
On a alors :

$$\boxed{E(\mathrm{X}) = p, V(X) = p * (1-p) = p * q, \sigma(X) = \sqrt{p * (1-p)} = \sqrt{p * q}}$$

Exemple :
On réalise une expérience qui a deux issues possibles : le succès dans 40% des cas et l'échec dans 60% des cas.
On pose alors $P(X = 0) = P(\text{échec}) = 0.6$ et $P(X = 1) = P(\text{succès}) = 0.4$.

3) Loi binomiale

Définition :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ si et seulement si :
(1) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$,
(2) $P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} * p^k q^{n-k}$ avec $q = 1-p$
Notation : $X \leadsto \mathcal{B}(n,p)$
On a alors :

$$\boxed{E(X) = n * p, V(X) = n * p * (1-p) = n * p * q, \sigma(X) = \sqrt{n * p * (1-p)} = \sqrt{n * p * q}}$$

Exemple :
On lance 15 fois une pièce truquée telle que "Face" a une probabilité d'apparaître égale à $\frac{2}{3}$ et "Pile" une probabilité égale à $\frac{1}{3}$; si X désigne le nombre de "Faces" obtenus sur les 10 lancers, X suit la loi $\mathcal{B}\left(15,\frac{2}{3}\right)$. Alors $E(X) = 10, V(X) = \frac{10}{3} \approx 3.33, \sigma(X) = \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1.83$.

4) Loi hypergéométrique

Définition :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi hypergéométrique de paramètre $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec $n \leq N$ et $p \in]0,1[$ si et seulement si :
(1) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$,
(2) $P(X = k) = \dfrac{\binom{Np}{k} * \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
Notation : $X \leadsto \mathcal{H}(N,n,p)$
On a alors :

$$\boxed{E(X) = n * p, V(X) = \frac{N-n}{N-1} * n * p * (1-p), \sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Attention : la définition de la loi impose la condition suivante : $n \leq \min\left(Np, N(1-p)\right)$.
Dans le cas contraire, $X(\Omega)$ est contenu strictement dans $[\![0,n]\!]$, les formules ci-dessus ne sont plus valables.

Exemple :
On tire simultanément et sans remise 3 boules dans une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules vertes.
Si X désigne le nombre de boules rouges obtenues dans le tirage, $X \leadsto \mathcal{H}\left(10,3,\frac{2}{5}\right)$.
Alors $E(X) = \frac{6}{5} = 1.2, V(X) = \frac{14}{25} = 0.56, \sigma(X) = \sqrt{\frac{14}{25}} \approx 0.75$

5) Loi géométrique

Définition :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si et seulement si :
(1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
(2) $P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$ où $q = 1 - p$
Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$
On a alors :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}, V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}}$$

Exemple :
On lance un dé cubique régulier jusqu'à l'obtention de la face 4.
Si X désigne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 4 pour la première fois, on a :
$X \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.
Alors $E(X) = 6, V(X) = 30, \sigma(X) = \sqrt{30} \approx 5.48$

Variante possible :
On trouve quelquefois la définition suivante :
(1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
(2) $P(X = k) = p(1-p)^k = pq^k$ où $q = 1 - p$
Dans ce cas, X désigne le nombre de tentatives précédant le premier succès.
Seule l'espérance mathématique est modifiée :

$$\boxed{E(X) = \frac{1-p}{p}, V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}}$$

6) Loi de Poisson

Définition :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$ si et seulement si :
(1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
(2) $P(X = k) = \frac{\lambda^k * \exp(-\lambda)}{k!} = \frac{\lambda^k * e^{-\lambda}}{k!}$
Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$
On a alors :

$$\boxed{E(X) = \lambda, V(X) = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}}$$

Les variables qui suivent des lois de Poisson correspondent souvent à des événements qui se réalisent de façon aléatoire avec des fréquences d'apparition restant assez faibles comme des pannes de machines, des accidents, etc...

II Lois absolument continues

1) Loi continue uniforme et loi rectangulaire

Définition 1 :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi continue uniforme si et seulement si sa densité de probabilité s'écrit :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 1 \text{ si } 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Alors $X(\Omega) = [0, 1]$

Notation : $X \leadsto \mathcal{U}(\,0,1)$

La fonction de répartition de X s'écrit :

$$\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ F(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ F(x) = 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

On a alors :

$$\boxed{E(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}, V(X) = \frac{1}{12} \approx 0.083, \sigma(X) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.29}$$

Définition 2 :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi rectangulaire sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si sa densité de probabilité s'écrit :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < a \\ f(x) = \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a < x < b \\ f(x) = 0 \text{ si } x > b \end{cases}$$

Alors $X(\Omega) = [a, b]$

Notation : $X \leadsto \mathcal{U}(\,a, b)$

La fonction de répartition de X s'écrit :

$$\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x < a \\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \\ F(x) = 1 \text{ si } x > b \end{cases}$$

On a alors :

$$\boxed{E(\mathrm{X}) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}}$$

Ce type de loi correspond à des phénomènes uniformément répartis sur un intervalle de temps.

2) Loi exponentielle

Définition :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si sa densité de probabilité s'écrit :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Alors $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$

Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

La fonction de répartition de X s'écrit :

$$\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ F(x) = 1 - \exp(-\lambda x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\boxed{E(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda}, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

Ce type de loi correspond à des phénomènes dits "sans mémoire" comme les processus Markoviens en temps continu que l'on rencontre fréquemment dans les files d'attente et réseaux de files d'attente.

3) Loi normale

Définition 1 :
Une variable aléatoire U définie sur Ω suit une loi normale centrée réduite si et seulement si sa densité de probabilité s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Alors $U(\Omega) = \mathbb{R}$

Notation : $U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

La fonction de répartition de U s'écrit :

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

On ne sait pas calculer cette fonction à l'aide des fonctions usuelles. Sa valeur est donnée par des tables numériques.

On a alors :

$$\boxed{E(\mathrm{U}) = 0, V(U) = 1, \sigma(U) = 1}$$

Définition 2 :
Une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ si et seulement si sa densité de probabilité s'écrit :
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
Alors $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$

La fonction de répartition de X s'écrit :
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}\right) dt$$
On montre par changement de variable dans l'intégrale que $F(x) = \Pi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$.

On a alors :
$$\boxed{E(\mathrm{X}) = m, V(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sigma}$$

Ce type de loi correspond à des phénomènes touchant de grands nombres d'individus. On rencontre très fréquemment cette loi en statistiques.

Propriété :
Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes deux à deux et suivant respectivement les lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1), \cdots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$, alors la variable $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $m = m_1 + \cdots + m_n$ et $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$.