Université de Tours — Année 2020 - 2021

L 2 Licence de Mathématiques — T D Analyse S4

T D 2

Suites de fonctions - Exercices théoriques

1 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n f(x)$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.
2) On suppose que la convergence est uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $f(1) = 0$.
3) Réciproquement on suppose que $f(1) = 0$. On va prouver, en revenant à la définition, que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.
a) Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. En utilisant la continuité de f au point 1, montrer qu'il existe un réel $a \in]0,1[$ tel que

$$\forall x \in [a,1], \quad |f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

b) Montrer que pour tout $x \in [0,a]$, on a $|f_n(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|\, a^n$.

c) Conclure.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = e^x$.
2) En considérant la suite $x_n = n$, montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $0 \leq 1 - \dfrac{1}{1 + \frac{t}{n}} \leq \dfrac{t}{n}$.

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $0 \leq x - n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \leq \dfrac{x^2}{2n}$, et par suite

$$e^x e^{-x^2/2n} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

4) Déduire de 3) que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$, $a > 0$.

3 On considère la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right)$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right).$$

En déduire que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}.$$

2) Soit $x \in [0,1]$ fixé. Montrer que la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que la suite de fonction (P_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $\varphi_n(x) = \sqrt{x} - P_n(x)$.
a) Montrer que

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)\varphi_n(x).$$

En déduire que $\varphi_n(x) \leq \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \sqrt{x}$.
4) Déterminer $\sup\limits_{t\in[0,1]} t\left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$. Conclure que la convergence de la suite (P_n) est uniforme sur $[0,1]$.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Indication: Utiliser la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
a) Montrer que l'intégrale I_n est convergente et on a $I_n = 1$.
b) A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)dx$. Conclure.

5 En utilisant le Théorème de la convergence dominée montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} n\sin\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x}\,dx = 1.$$