Université de Tours
Licence de Mathématiques

Contrôle continu 2

EP 2 : Arithmétique — Semestre 3

L'épreuve dure 2h. Les exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la clarté de la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1 Vrai ou Faux (justifier en invoquant éventuellement un théorème du cours ou donner un contre-exemple).

1. Si $d_1 \mid m$ et $d_2|n$ alors $d_1d_2|mn$.
2. Si deux entiers sont premiers entre eux, alors chacun d'eux est premier avec leur somme.
3. L'équation $15x \equiv 1$ modulo 60 a trois solutions distinctes.
4. L'équation $x^p - x \equiv 0$ modulo p , où p est premier, a p solutions.
5. L'ensemble des solutions entières de $34x + 85y = 0$ est $\{(85k, -34k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
6. $a^3 - b^3$ est divisible par 3 si et seulement si $a - b$ est divisible par 3.

Exercice 2 Dans cette exercice on s'intéresse à l'équation suivante définie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

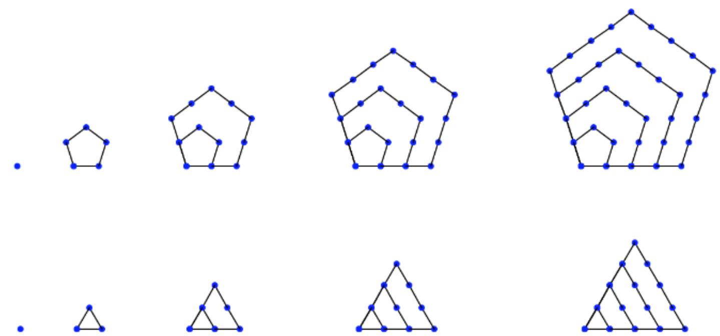
$$(E_m) \qquad x^2 \equiv -1 \mod m.$$

On désigne par $A(m)$ le nombre de solution modulo m de (E_m), autrement dit

$$A(m) = \mathrm{Card}\big(\{x \in \{0, \dots, m-1\} \mid x^2 \equiv -1 \mod m\}\big).$$

1. Montrer que $A(2) = 1$.
2. Soit p un nombre premier impair.
   (a) Montrer que $x \equiv -x \mod p$ si et seulement si $x \equiv 0 \mod p$.
   (b) Montrer que si x et x' sont deux solutions de (E_p) alors $x \equiv \pm x' \mod p$.
   (c) En déduire que $A(p) = 0$ ou $A(p) = 2$.
3. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a
   $$x^2 \equiv -1 \mod mn \iff \begin{cases} x^2 \equiv -1 \mod m \\ x^2 \equiv -1 \mod n \end{cases}$$
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ une solution du système
   $$\begin{cases} a^2 \equiv -1 \mod m \\ b^2 \equiv -1 \mod n \end{cases}$$
   Montrer qu'il existe une unique solution $x \in \{0, \dots, mn-1\}$ de (E_{mn}) telle que $\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ x \equiv b \mod n \end{cases}$.
4. Déduire de la question précédente que si $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$ alors $A(mn) = A(m)A(n)$.
5. Montrer que $A(65) = 4$ et résoudre $x^2 \equiv -1 \mod 65$ sachant que 5 et 8 sont les solutions de (E_{13}).

Exercice 3 Les nombres triangulaires T_n (respectivement pentagonaux P_n) sont les nombres qui peuvent être arrangés sous forme de triangles (respectivement de pentagones) comme indiqués sur la figure ci-dessous. On a par exemple $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15$ et $P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12, P_4 = 22, P_5 = 35$.



Dans cette exercice, on s'intéresse aux nombres qui sont à la fois triangulaires et pentagonaux.

1. Montrer que $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $P_n = T_m$ ssi $(6n-1)^2 - 3(2m+1)^2 = -2$.

On désigne par $(*)$ l'équation $x^2 - 3y^2 = -2$.

4. (a) Soit $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^4$. Montrer que $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3}$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. On pourra utiliser ici le fait que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

   (b) Montrer que si (a, b) est solution de $(*)$, alors (a_2, b_2), défini par :

$$(a_2 + \sqrt{3}b_2) = (a + \sqrt{3}b)(2 + \sqrt{3})$$

   est également solution de $(*)$.

5. Montrer que tous les couples $(a_k, b_k), k \in \mathbb{N}$ définis par

$$(a_k + \sqrt{3}b_k) = (1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k$$

   sont solutions de $(*)$.

6. Calculer (a_3, b_3) et en déduire que $P_{12} = T_{20} = 210$.