CC1 Analyse 4 durée : 2h

Les calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{nx^3 + e^{-nx}}{nx^2 + 1}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f qu'on déterminera. (distinguer le cas $x = 0$). La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?
2. En utilisant la suite $x_n = \dfrac{1}{n}$, montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.
3. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0\ , \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{nx} + e^{-nx}.$$
   (b) En déduire que pour tout réel $a > 0$, la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a, +\infty[$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^1 f_n(x)dx$, pour tout $a \in]0, 1[$.
4. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_0^1 (f_n(x) - x)dx\right| \leq \frac{1}{n}\left(1 - e^{-n}\right) + \frac{1}{2n}\ln(1 + n).$$
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(1 + nx^2)}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$. La convergence de la série est-t-elle normale sur $[0, +\infty[$?
3. Montrer que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.

4. On se propose de montrer que la convergence de la série n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

   (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, +\infty[\ , \quad \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{x}{1 + 2nx^2} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

   (b) Déterminer $\sup\limits_{x \in [0, +\infty[} \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{x}{1 + 2nx^2}$.

   (c) Conclure

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x),\ x \in \mathbb{R}$
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ comme somme d'une série.