TD 4

Séries numériques

1 1) Montrer que la série de termes général $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$ est convergente et calculer sa somme. (Indication : décomposer la fraction en éléments simples.)

2) Montrer en utilisant la définition que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n$ diverge (rappel : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$).

Proposer ensuite une preuve immédiate de divergence basée sur un résultat du cours.

2 Etudier la convergence des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \qquad u_n = \frac{2^n+3^n}{5^n} \qquad u_n = \frac{e^{-n}}{n+1} \qquad u_n = \frac{2+\sin n}{n}$$

$$u_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad u_n = \frac{2^n n!}{n^2} \qquad u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$$

$$u_n = \frac{2^{n^2+n}}{3^{n^2+1}} \qquad u_n = ne^{-n^2} \qquad u_n = \frac{\ln n}{n^2} \qquad u_n = \frac{\ln n}{n}.$$

3 Etudier la convergence des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \qquad u_n = \sqrt{n}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right) \qquad u_n = n^2\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$u_n = \frac{2+\cos n}{n\ln n} \qquad u_n = \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} \qquad u_n = (1+n)^{1/n} - n^{1/n}$$

4 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$a_n = (-1)^n\frac{\ln n}{n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}, \quad c_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n2^n}{(n+2)!}$ et $a_n = \dfrac{2^n}{(n+2)!}$

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3) Vérifier que $2(a_{n-1} - a_n) = u_n$. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

6 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2) On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$. Calculer S_n. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

7 On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

1) Calculer $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Le critère d'Alembert permet-il de déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$?

2) On pose $b_n = \ln a_n - \ln a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que la série de terme général b_n est une série à termes positifs divergente.
b) Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $S_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$.
En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3) On pose $c_n = na_n$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $na_n \geq a_1$ pour tout $n \geq 1$ (étudier le rapport $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$).
En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$.

8 * Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{n!}{\alpha.(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

On pose $t_n = n^\alpha u_n$ et $v_n = \ln(t_{n+1}) - \ln(t_n)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 v_n$. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est convergente.

2) Montrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^\alpha}$.
Pour qu'elle valeur de α la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est-elle convergente ?

9 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+3}.$$

3) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

10 Soit α un réel strictement supérieur à 1.

1) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égale à 2, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul et tout entier N supérieur ou égale à n, la double inégalité suivante :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

3) Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$