**T D 4 bis**

# Toujours plus de séries entières

**1** Déterminer le développement en série entière et vérifier le rayon de convergence de

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$$

**2** Calculer, selon les valeurs du paramètre réel $t$, le développement en série entière en $0$ de la fonction suivante

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2tx+1}$$

**3** Dans cet exercice, on cherche à calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$ par deux méthodes. On pose

$$S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Méthode 1. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Calculer $1+j^k+j^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.
   (b) En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$.
2. Méthode 2
   (a) Former une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par $S$.
   (b) La résoudre.
   (c) Retrouver la valeur de $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$.

**3** Soient $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et $R > 0$. Montrer que pour $n$ assez grand, $P_n$ n'admet pas de racines dans le disque fermé de centre $0$ et de rayon $R$.