Université de Tours	Année 2022 - 2023
L2 Licence de Mathématiques	TD Analyse 3

TD 1

Suites Numériques[1]

1 *(révisions des méthodes de calcul des limites et des équivalents)*

Pour chacune des suites dont le terme général est donné ci-dessous, déterminer son éventuelle limite. Lorsque cette limite vaut 0^+ ou $+\infty$, donner un équivalent simple.
Outils : croissances comparées, développements limités, équivalences, notations o,...

$$u_n = \frac{n-2020}{n+2020}, \quad u_n = \frac{n^3+3n+5}{n^2+2}, \quad u_n = \frac{(n+2)+10n}{n(n+2)-3}, \quad u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^{3/2}-n}, \quad u_n = \frac{2^n}{3^n+5^n},$$

$$u_n = \frac{e^n+1}{e^n+e^{-n}}, \quad u_n = \frac{\ln(3n)}{\ln n^3}, \quad u_n = \frac{(n+2)!}{n!+2}, \quad u_n = \ln\big(1+\frac{1}{n}\big), \quad u_n = \mathrm{sign}(\frac{1}{n}), \quad u_n = e^{\frac{2n}{n+\sqrt{3n}}},$$

$$(^*)u_n = \tan\big(\frac{\pi}{2}\cos(\frac{1}{n})\big), \quad u_n = n\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big), \quad u_n = \frac{n\sin\frac{1}{n}}{1+\sin\frac{1}{n}}, \quad u_n = n^4\Big(\cos\frac{1}{n}-1+\frac{1}{2n^2}\Big),$$

$$(^*)u_n = \frac{\sin\big(\cos\frac{1}{n}-1\big)}{\cos\frac{1}{n}-1}, \quad u_n = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n+1}{n}}, \quad u_n = \Big(1-\frac{1}{3n}\Big)^{n+2}, \quad (^*)u_n = \frac{n+\cos(n)+e^n}{n^{100}+2^n},$$

$$u_n = \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}}, \quad (^*)u_n = \big(\ln(n^{2020})+n^2\big)(1-\cos\frac{1}{n}), \quad (^*)u_n = \frac{\ln\big(1+2^{-n}\big)+e^{-\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n}}{\sin^2\frac{1}{n}}$$

2 Vérifier si les affirmations suivantes sont vraies au fausses lorsque $n \to +\infty$:

$$n^3 = \mathcal{O}(n^3), \quad n^2 = \mathcal{O}(n^3), \quad n^5 = \mathcal{O}(n^3), \quad n^3 = o(n^3), \quad n^2 = o(n^3), \quad n^5 = o(n^3),$$

$$\frac{1}{n^4} = o\big(\frac{1}{n^3}\big), \quad \frac{1}{n^2} = \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^3}\big), \quad \frac{1}{n^5} = \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^3}\big), \quad \ln n = o\big(\ln(n^7)\big), \quad e^n = o(e^{3n}), \quad \frac{1}{e^{2n}} = \mathcal{O}(e^{-n}).$$

3 Soient f, g, h trois fonctions à valeurs réelles *positives* définies au voisinage de $+\infty$. Justifier les règles suivantes du langage $o, \mathcal{O}, \sim$:

(a) $f \sim_{+\infty} g \implies fh \sim_{+\infty} gh$.

(b) si $f = o_{+\infty}(g)$ et $h = o_{+\infty}(g)$, alors $f \pm h = o_{+\infty}(g)$ [ce qui se lit : "$o(g) \pm o(g) = o(g)$"].

(c)* si $f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ et $g = \mathcal{O}_{+\infty}(h)$, alors $f = \mathcal{O}_{+\infty}(h)$ [ce qui se lit : "$\mathcal{O}\Big(\mathcal{O}(h)\Big) = \mathcal{O}(h)$"].

(d)* si $f = \mathcal{O}_{+\infty}(gh)$, alors $f = g\mathcal{O}_{+\infty}(h)$ [ce qui se lit : "$\mathcal{O}\Big(gh\Big) = g\mathcal{O}(h)$"]

4 *(équivalences et leur composition avec des fonctions non linéaires)*

1) Soit u_n, v_n deux suites positives, de limite $+\infty$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Montrer que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

[1] Les questions ou exercices étiquetés avec * sont ceux d'entraînement ou d'approfondissement

2) Montrer les caractérisations suivantes :

$$(a) \qquad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o_{+\infty}(v_n).$$

$$(b) \qquad e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n} \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

3) Est-il vrai que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$? Répondre par une preuve ou un contrexemple.

5 *(exercice composite type concours : un peu de ε, un peu de récurrence, et de la réflexion)*
Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 0$.
1) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $x_{n+1} \leq \frac{1}{2} x_n$.
2) En déduire que pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} x_{n_0}$.
En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
3) Application : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $a^n = o(n!)$.

6 *(sous-suites, prise ne main des notions* $\liminf$, $\limsup$, *risques de confusion avec* $\inf$, $\sup$*)*
On rappelle que $\pi = 3,14159265358979...$ et $e = 2,71828182845904....$ On note $\mathrm{Ent}(x)$ la partie entière de x ; $\mathrm{sign}(x)$ vaut ± 1 si $\pm x > 0$ et 0 si $x = 0$. Pour les suites suivantes, donner :

les valeurs d'adhérence ; $\liminf$ et $\limsup$; $\inf$ et $\sup$.

On demande des explications mais pas de preuve.

(a) $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$, $u_4 = 5$, ..., les décimales successives de π

(b) $u_0 = 2$, $u_2 = 27$, $u_3 = 271$, $u_4 = 2718$,..., $u_n = \mathrm{Ent}(10^n \times e)$

(c) pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_n une valeur entiere choisie au hasard entre 0 et 1000

(d) $u_0 = 1000$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n une valeur entière choisie au hasard entre 0 et u_{n-1}

(e) Même question pour les suites de terme général donne par les formules suivantes:
$u_n = \cos(n\pi)$; $u_n = n\,(-1)^n$; $u_n = \sin\left(\dfrac{2^n\pi}{4}\right)$; $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n}$; $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$; $u_n = \mathrm{sign}(\sin n)$.

7 *(cas important: distinction des termes pairs/impairs)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$.
1. Que pensez-vous des propositions suivantes (donner un contrexemple ou une preuve) :
(i) Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ ?
(ii) Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$?
(iii) Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, *de même limite* ℓ, alors aussi $(u_n)_n$ converge ?
2. Montrer en utilisant **1.** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{2-\cos(n\pi)}$ est convergente.

8 *(révision: étude des suites récurrentes)* Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0, +\infty[\text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}\,.$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$.
1) Déterminer les ponts fixes de f et étudier le signe de $f(x) - x$.
2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ; trouver son sens de variation selon la valeur de u_0.
3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

9 * Soit la suite récurrente définie par $u_0 = 2022$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = cu_{n-1}$. Trouver $\liminf_{n\to\infty} u_n$ et $\limsup_{n\to\infty} u_n$ lorsque $c = 0$, lorsque $c = -1$, lorsque $c = 1/2$ et lorsque $c = 2$.

10 * Soit $(u_n)_n$ la suite récurrente obtenue de façon suivante: on se donne une valeur u_0 et au rang n, on prend pour u_n la $n^{\text{ème}}$ décimale de $\sin(u_{n-1})$.
(i) Montrer que, quel que soit u_0, la suite $(u_n)_n$ admet une sous-suite convergente.
(ii)* Montrer que si $\liminf_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $(u_n)_n$ est convergente.

11 * Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+e^{-x}}$, et $(u_n)_n$ la suite réelle définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
1) Montrer que $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
2) Etudier les variations de f. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution qu'on note α.
3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [0, +\infty[$.
4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

12 * Soit $f : x \mapsto x - x^2$, et $(u_n)_n$ la suite réelle définie par : $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
1) Etudier les variations de f sur $[0, 1]$.
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = nu_n$.
Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante et admet une limite ℓ appartenant à $]0, 1]$.
4) On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que la suite $(w_n)_n$ converge vers $\ell(1 - \ell)$.
5) *(question indépendante de 1)–4))* Soit $(t_n)_n$ une suite réelle vérifiant la propriété suivante :

$$\text{il existe } a > 0 \text{ tel que pour } n \geq n_0, \text{ on a } t_{n+1} - t_n \geq a/n.$$

Montrer que $t_{2n} - t_n \geq a/2$ pour $n \geq n_0$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.
6) Montrer que si $\ell \neq 1$, la suite (v_n) vérifie les conditions imposées sur la suite (t_n) de la question précédente. En déduire la valeur de ℓ.