Exercices supplémentaires — Pour progresser

1 1) Déterminer les réels a, b, et c tels que
$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{ax+b}{x^2-x+1}.$$
2) Calculer les intégrales suivantes :
$$I_1=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_2=\int_0^1\frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

2 Calculer les intégrales suivantes :
$$I_1=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}} \qquad I_2=\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x$$
$$I_3=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{poser } y=\frac{1}{x}$$

3 Calculer les intégrales suivantes :
$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2(x)} \quad \text{et} \quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2(x)}$$
Utiliser le changement de variable $y=\text{tang}(x)$.

4 On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Montrer à l'aide du changemement de varible $y=\pi-x$, que
$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$
En déduire la valeur de I.

5 On pose
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$
1) En utilisant le changement de variable $y=\frac{\pi}{2}-x$. Montrer que $I=J$.

2) Calculer $I+J$. En déduire que $I=J=\dfrac{\pi}{4}$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

6 On se propose de Calculer $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}|\cos(nx)|\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Monter que $I_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{n\pi}|cosx|\,\mathrm{d}x$.

2) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|cosx|\,\mathrm{d}x=2.$$
3) En déduire que $I_n=2$.

7 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\displaystyle\int_0^n(1+x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que $v_n=2-(2+n)e^{-n}$ et Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n$

2) Pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$u_k=\int_{k-1}^k(1+x)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
a) Calculer u_k .

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a
$$v_n=\sum_{k=1}^n u_k=(e-1)\sum_{k=1}^n ke^{-k}+\frac{e-2}{e-1}(1-e^{-n}).$$
3) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n ke^{-k}=\frac{e}{(e-1)^2}$.

8 1) En utilisant les sommes de Riemann pour une fonction à choisir calculer les limites suivantes :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}},\ \alpha>0.$$

9 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

On pose $M=\sup_{t\in[a,b]}|f''(t)|$.

1) À l'aide de deux intégration par parties successives, montrer que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(t)\,\mathrm{d}x.$$
2) Calculer $\displaystyle\int_a^b(x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x$. En déduire que
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\le M\frac{(b-a)^3}{12}$$