Université de Tours L 3 Licence de Mathématiques Année 2024 - 2025

Topologie des espaces vectoriels normés

T D 2

Ouverts, Fermés, Intérieur, Adhérence

1 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, $a, b \in E$ et deux réels $r, s > 0$.

1) a) On suppose que $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$. Montrer que $\|a - b\| < r + s$.

b) Réciproquement on suppose que $\|a - b\| < r + s$. Montrer que $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$.

Indication: Considérer le vecteur $x = \dfrac{s}{r+s}a + \dfrac{r}{r+s}b$.

2) On suppose que $B(a, r) \subset B(b, s)$. Montrer que $\|a - b\| \leq s - r$.

Indication : Distinguer les cas $a = b$ et $a \neq b$.

2 Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et deux réels r_1 et r_2 avec $0 < r_1 < r_2$.
On considère les ensembles suivants :

$$A = \Big\{x \in E / \, r_1 < \|a - x\| < r_2\Big\} \qquad B = \Big\{x \in E / \, r_1 \leq \|a - x\| \leq r_2\Big\}.$$

$$C = \Big\{x \in E / \, r_1 < \|a - x\| \leq r_2\Big\}$$

1) Montrer que A est un ouvert de E et B est un fermé de E.

2) L'ensemble C est il un ouvert de E , un fermé de E ?

3) Déterminer $\mathring{C}$ et $\overline{C}$.

3 Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

a) En observant que son complémentaire est ouvert.

b) Par la caractérisation avec les suites, des parties fermées.

4 Soient (E,d) un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers ℓ.

Montrer que l'ensemble $A = \Big\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\Big\} \cup \Big\{\ell\Big\}$ est un fermé de E

5 Soit A la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -x < y < x\Big\}.$$

1) Représenter A.

2) Montrer que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que pour tout réel $a \geq 0$, on a $(a,a) \in \overline{A}$ et $(a,-a) \in \overline{A}$.

4) Déterminer $\overline{A}$.

6 Soient (E,d) un espace métrique, A et B deux parties de E.

1) Montrer que

$$\begin{array}{ll} \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, & \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}. \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{array}$$

Donner des exemples dans $\mathbb{R}$, montrant que les inclusion peuvent être strictes.

2) On note Comp(A) le complémentaire de A dans E. Montrer que

$$\mathrm{Comp}(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{Comp}(A)}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Comp}\left(\overset{\circ}{A}\right) = \overline{\mathrm{Comp}(A)}.$$

7 Soit E un espace vectoriel muni de deux nomes N_1 et N_2.

1) Montrer que si les normes sont équivalentes alors les parties ouvertes de (E, N_1) sont les mêmes que les parties ouvertes de (E, N_2).

2) Établir la réciproque.

8 Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Si A et B sont des parties non vides de E,

on note $A + B = \Big\{x + y \ : \ x \in A, \ y \in B\Big\}$.

1) Montrer que pour tout $a, b \in E$ et $r, s > 0$, on a

$$B(a,r) + \{b\} = B(a+b,r) \qquad \text{et} \qquad B(a,r) + B(b,s) = B(a+b, r+s).$$

2) Soit A est un ouvert de E.

a) Montrer que pour $b \in E$ on a $A + \{b\}$ est un ouvert de E.

b) En déduire que si B une partie quelconque, non vide de E alors $A + B$ est un ouvert de E.

3) On considère dans $\mathbb{R}^2$ les parties suivantes :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ xy = 1\right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Montrer que A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $A + B$ et montrer que cet ensemble n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

9 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$F = \left\{f \in E/\ f(0) = 0\right\}.$$

1) On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$. Montrer que F est un fermé de $(E, \| \ \|_\infty)$.

2) On munit E de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$f_n(t) = nt \ \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f_n(t) = 1 \ \text{ si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1.$$

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t) - 1|dt$.

b) En déduire que F n'est pas un fermé de $(E, \| \ \|_1)$.

3) Montrer que F est dense dans $(E, \| \ \|_1)$

10 Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Soient $a \in \mathring{A}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers a. Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $x_n \in A$.

Application : Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On pose $A = \left\{f \in E/f(0) = 0\right\}$.

a) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\mathring{A} = \emptyset$.

b) Montrer que A est un fermé de E.