# Chapitre IV Séries de Fourier

## IV.0 Le cadre des séries trigonométriques

On va s'intéresser brièvement aux séries en $\sum$ $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec des coefficients réels complexes, surtout dans le cadre de CVU.

Puis on va se focaliser sur la question de décomposition de fonctions $2\pi$-périodiques en de telles séries - sans garantie de convergence !

On associe à toute fonction $f(\cdot)$ intégrable sur la période une série trigo, dite "la série de Fourier de $f(\cdot)$" et notée $SF_f(\cdot)$.

On se gardera d'écrire $f(x)$ = sa série de Fourier, puisque

- $SF_f$ peut ne pas converger en certains points
- $SF_f(x)$ peut converger mais vers une somme différente de $f(x)$ !

On donnera des conditions précises, suffisantes, permettant d'éviter ces deux écueils.

Rq La situation ressemble beaucoup à celle qu'on a vu dans le cadre de décomposition de fonctions régulières en série de Taylor.

Voici le résumé, à comparer avec celui des dernières pages du Chapitre III (on y anticipe sur ce qui sera raconté dans Chapitre IV)

- Seules les fonctions périodiques (ou rendues périodiques, en "périodisant" des expressions qui peuvent être quelconques) et intégrables - dans la pratique, continues par morceaux - peuvent être décomposées en série de Fourier. En revanche, peu de régularité est nécessaire.
- Les coefficients de $SF_f$ se calculent - en théorie et en pratique - via la formule de $f(\cdot)$ et l'intégration, avec beaucoup d'IPP.
  Il n'y a pratiquement pas de méthode indirecte de décomposition de fonctions en SF, si ce n'est la résolution des équadiff (NB Pour les séries de Taylor, on privilégiait d'autres méthodes !)
- La théorie de convergence est follement compliquée, en L2 on ne verra qu'un ou deux Théorèmes qui sont la partie émergée de l'iceberg.
  L'ensemble des $x$ pour lequel $SF_f(x)$ converge vers $f(x)$ peut être très tordu.
  Les SF ne sont pas vraiment faits pour être dérivés T à T, le seul cadre pour cela étant donné par l'application au cas par cas des Th. généraux du Chapitre II

- les développements en SF sont très utilisés dans la théorie et la pratique de la transmission des signaux, d'images, dans leur compression... ainsi que dans la résolution et études théoriques d'équations différentielles "aux dérivées partielles"
- ce Chapitre n'est qu'une première rencontre avec les SF, l'essentiel de la théorie requiert le cadre d'Analyse Fonctionnelle (M1) et Théorie d'Intégration (L3) et notamment la reformulation du problème dans le langage des Espaces de Hilbert.

Nous allons entrevoir l'interprétation des formules qu'on aura apprises en termes hilbertiens ; pour cela, nous compléterons le point de vue réel (SF en $\sum \cos(nx)$ et $\sin(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et coefficients le plus souvent réels) par le cadre complexe (SF en $\sum e^{inx}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et coefficients complexes).

Les résultats les plus importants de ce Chapitre seront donnés sans preuve, avec tout au plus des motivations. On se limitera aux fonctions $2\pi$-périodiques.

## IV.1 Séries trigonométriques : cas de convergence uniforme

**Déf** (série trigonométrique)

Une série de fonctions de la forme $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, qu'elle converge ou pas, s'appelle série trigonométrique. Les sommes partielles de telles séries, càd

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$ sont appelés "polynômes trigonométriques".

Il est clair que les polynômes trigonométriques sont continues et $2\pi$-périodique. La fonction somme de la série, qui peut être définie seulement sur une partie de $\mathbb{R}$ (les $x$ pour lesquels $\lim_{N\to+\infty} S_N(x)$ existe!), est forcément $2\pi$ périodique.

**Rq** Notez bien le 1er terme $\frac{a_0}{2}$, qui peut s'écrire $\frac{a_0}{2}\cos(0x)$ (et le terme avec $b_0 \sin(0x)$ est absent puisque $\sin(0x)=0$).

Ce choix peut paraître étrange mais il simplifie les formules de calcul des coefficients.

**Rq** On peut remplacer les fonctions $2\pi$-périodiques par $T$-périodiques en travaillant avec $\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$. C'est important dans la pratique, mais on va se restreindre à $T=2\pi$ dans tout ce qui suit. Les formules pour $T$ général se trouvent dans tout manuel / document / page web parlant Fourier.

On verra que l'intégration de produits ($f(x)$ fois $\sin(nx)$, $\sin(nx)$ fois $\cos(kx)$, etc.) jouent un rôle essentiel dans les calculs des SF. On donne deux lemmes.

**Lemme** (intégration sur la période)

Soit $f$ continue par morceaux, $2\pi$-périodique. Alors $\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx$ ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}$ ; notamment, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

**Preuve** Donnons la preuve pour $a \in [0, 2\pi[$ ; par la relation de Chasles,

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_a^{2\pi} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(x)\,dx}_{= \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(x-2\pi)\,dx} \quad \text{par périodicité : } f(x-2\pi) = f(x)$$

$$= \int_a^{2\pi} f(x)\,dx + \int_0^a f(y)\,dy \quad \text{avec } y = x-2\pi,\ dy = dx$$

$$= \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Pour $a$ général, on effectue d'abord la division euclidienne de $a$ par $2\pi$ : $a = 2\pi q + \tilde{a}$, et

$$\int_a^{2\pi+a} = \int_{2\pi q+\tilde{a}}^{2\pi(q+1)+\tilde{a}} = \int_{\tilde{a}}^{2\pi+\tilde{a}} = \int_0^{2\pi}. \quad \boxtimes$$

**Lemme technique** (relations d'"orthogonalité", etc.)

On a
- $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $k \neq n$
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,dx = 0$$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$
$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(kx)\,dx = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(kx)\,dx = \pi = \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx$$
- pour $k=0$, $\int_0^{2\pi} \cos^2(0x)\,dx = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi$

**Preuve** Il s'agit de calculs, avec des formules de trigo.

Par exemple,

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2kx)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2kx)}{2k}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4k}\left[\cos(4\pi k) - \cos 0\right] = -\frac{1}{4k}[1-1] = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2kx)\right)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos((n-k)x) - \cos((n+k)x)\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-k)x)}{n-k} - \frac{\sin((n+k)x)}{n+k}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[0-0-0+0] = 0,$$

etc. $\boxtimes$

**Rq** Le sens de ces formules sera d'autant mieux visible dans le cas complexe.

**Corollaire** Si $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$, alors

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Preuve : On écrit $|S_N(x)|^2 = S_N(x) \cdot \overline{S_N(x)} = \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x\right.$

Vous pouvez lire la preuve dans le cas réel, sans $\overline{\phantom{a}}$.

$\left. + \dots + a_N \cos Nx + b_N \sin Nx\right) \cdot \left(\frac{\overline{a_0}}{2} + \overline{a_1} \cos x + \overline{b_1} \sin x + \dots + \overline{a_N} \cos Nx + \overline{b_N} \sin Nx\right)$,

qu'on développe terme à terme et intègre sur $[0, 2\pi]$.

Grâce au lemme technique, tous les termes "croisés" donnent zéro après intégration ; le terme $\frac{a_0}{2} \cdot \frac{\overline{a_0}}{2}$ donne $2\pi \cdot \frac{|a_0|^2}{4} = \pi \frac{|a_0|^2}{2}$,

les termes $a_n \overline{a_n} \cos^2(nx)$ et $b_n \overline{b_n} \sin^2(nx)$ donnent $\pi(|a_n|^2 + |b_n|^2)$.

En divisant par $\pi$, on trouve $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$ ☒

Nous sommes prêts à considérer la situation de CVN d'une série trigo.

Prop (série trigonométrique CVN)

La série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ CVN ssi $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$ convergent.

Preuve Il est clair que $\|a_n \cos nx + b_n \sin nx\|_\infty \leq |a_n| + |b_n|$, donc CV de $\sum |a_n| + |b_n|$ implique la CVN de notre série trigo. De plus, $\sum |a_n| + |b_n|$ CV ssi $\sum |a_n|, \sum |b_n|$ CV.

Réciproquement, on peut établir que $\|a_n \cos nx + b_n \sin nx\|_\infty = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$ et donc la CVN de notre série trigo entraîne celle de $\sum \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$.

Or, $|a_n|, |b_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$, d'où la CV de $\sum |a_n|, \sum |b_n|$ par comparaison de séries à termes $\geq 0$. ☒

Corollaire Si $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$ CV,

alors la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge sur $\mathbb{R}$ et sa somme $S$ est une fonction continue.

Preuve Conséquence immédiate de CVU (garantie par CVN) et de la continuité de chaque terme de la série trigo. ☒

Proposition (identification de $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ connaissant la somme d'une série CVU)

On suppose que $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ CVU sur $\mathbb{R}$, de somme $S(x)$.

Alors les coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifient

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin(nx)\, dx.$$

Preuve : Par hypothèse de CVU, $\|S_N(x) - S(x)\|_\infty \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$. Comme $|\cos(kx)| \leq 1$,

$\|S_N(x)\cos(kx) - S(x)\cos(kx)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x)\cos(kx) - S(x)\cos(kx)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{|\cos(kx)|}_{\leq 1} \underbrace{|S_N(x) - S(x)|}_{\leq \|S_N(x) - S(x)\|_\infty} \leq \|S_N(x) - S(x)\|_\infty$

Donc, la série $\frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$ CVU sur $\mathbb{R}$ et sa somme est $S(x)\cos kx$. La CVU permet d'intégrer sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, donc

$$\int_0^{2\pi} S(x)\cos(kx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi}\cos nx \cos kx + b_n\int_0^{2\pi}\sin nx \cos kx\,dx.$$

Le lemme donne pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} S(x)\cos(kx)\,dx = a_k \cdot \pi$ (tous les autres termes sont nuls)

et pour $k=0$, $\int_0^{2\pi} S(x)\cos(0x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi$ ( — " — " — ).

C'est pareil pour $b_k$.

Finalement, $\int_0^{2\pi}$ peut être remplacé par $\int_{-\pi}^{\pi}$ grâce à la périodicité de $S(\cdot)$. ☐

Ainsi, nous avons trouvé le moyen de reconstituer les coefficients d'une série trigo à partir de sa somme — dans le cas d'une série CVU.

<u>Proposition</u> (identité de Parseval pour série trigo CVU)

On suppose encore que $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ CVU sur $\mathbb{R}$, de somme $S(\cdot)$.

Alors $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|S(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$.

<u>Preuve</u> Grâce à CVU, $S(\cdot)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodique.

La restriction de $S(\cdot)$ sur $[0, 2\pi]$ est bornée (fct. continue sur un intervalle borné est bornée : ce théorème important sera v. au cours de Topologie).

Et le produit de deux suites CVU et bornées est borné (un th. du Chapitre I) ;

ici, $\|S_N\|_\infty \le \underbrace{\|S\|_\infty}_{\text{fini}} + \underbrace{\|S_N - S\|_\infty}_{\to 0}$ et donc $S_N(x)\overline{S_N(x)} \to S(x)\overline{S(x)}$ unif${}^t$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $|S_N(x)|^2$ CVU vers $|S(x)|^2$ sur $\mathbb{R}$ ; on a le droit d'intervertir $\lim_{N\to\infty}$ et $\int_0^{2\pi}$.

Alors $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|S(x)|^2 dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|S_N(x)|^2 dx = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$

d'après le corollaire du lemme technique

$= \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$. ☐

<u>Rq</u> Notons que ceci implique que $\sum |a_n|^2 + |b_n|^2$ converge, puisque $|S(x)|^2$ est continue donc elle a une intégrale sur $[0, 2\pi]$.

Le seul cas facile où les deux résultats sont justifiés c'est celui de séries trigo CVN, c.à.d tq $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$ convergent. Signalons toutefois le cas suivant, qui donne CVU sur une partie de $\mathbb{R}$, adaptée aux coefficients $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ :

si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sont chacune de signe constant et $|a_n| \searrow 0$, $|b_n| \searrow 0$.

Dans ce cas CVU a lieu sur tout intervalle $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, ce qui ne permet pas de justifier l'intégration TàT sur $[0, 2\pi]$.

<u>Prop</u> (utilisation d'Abel pour $CV_{loc}U$ des séries trigonométriques)

Supposons $\forall n$ $a_n \geq 0$, et $a_n \geq a_{n+1}$ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ $CV_{loc}U$ sur $]0, 2\pi[$, càd elle CVU sur $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

<u>Preuve</u> Il s'agit d'appliquer Abel uniforme sur $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ : le TG de notre série est $a_n \cos nx = c_n(x)\, b_n(x)$ avec $c_n(x) = \cos nx$, $b_n(x) = a_n$.

Clairement, $\|b_n\|_\infty = a_n \searrow 0$ ; reste à mq $\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n(x)\right\|_\infty \leq$ const sur $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$.

Or, $\sum_{n=1}^{N} c_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Re}\, e^{inx}$

$= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{inx}\right) = \mathrm{Re}\, \frac{e^{ix}(1-e^{iNx})}{1-e^{ix}}$ ;

$$\left|\sum_{n=1}^{N} c_n(x)\right| \leq \underbrace{|e^{ix}|}_{=1}\, \underbrace{|1-e^{iNx}|}_{\leq 2} \cdot \left|\frac{1}{1-e^{ix}}\right| \leq 2 \left|\frac{1}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})}\right| = \frac{1}{\left|\frac{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}{2i}\right|} = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}.$$

Pour $x \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $|\sin\frac{x}{2}| \geq \sin\frac{\varepsilon}{2}$ ; d'où $\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n(x)\right\|_\infty \leq \frac{1}{\sin\varepsilon/2}$ = const. ∎

De la même façon, on prouve $CV_{loc}U$ de $\sum b_n \sin nx$ lorsque $b_n \searrow 0$ ; enfin, si tous les $a_n$ et/ou tous les $b_n$ sont négatifs à la place d'être positifs, avec $|a_n| \searrow 0$ et/ou $|b_n| \searrow 0$, on a encore le même résultat de $CV_{loc}U$.

<u>Rq</u> Dans le cas de la proposition précédente, la somme $S(x)$ de la série trigo est bien définie et continue sur $]0, 2\pi[$ ; en revanche, pour $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, la série peut diverger. <u>Exemple</u> : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos nx$ diverge en $x=0$ mais $CVU_{loc}$ sur $]0, 2\pi[$ grâce à la proposition précédente.

Dans la suite, on inversera la question précédemment posée, plutôt que d'étudier la somme d'une série trigo donnée, on se donnera une fonction $f(\cdot)$ qu'on cherchera à développer en série trigo. Les formules $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$ seront utilisées pour <u>définir</u> la série trigo dite série de Fourier de $f(\cdot)$.