Université de Tours 2020-2021

L2S3 UE 3-1 Algèbre

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1

Soif f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est : $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Par deux méthodes, trouver sa matrice représentative dans les bases suivantes de E :
$\mathcal{B}_1 = (e_2, e_1)$; $\mathcal{B}_2 = (-2e_1, e_2)$; $\mathcal{B}_3 = (e_1 - e_2, e_1 + e_2)$; $\mathcal{B}_4 = (e_2, e_1 - e_2)$.

2. Calculer A_0^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soif f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer : $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, puis $f(u)$ pour tout $u = (x, y, z) \in E$.

2. Soient $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = 2e_1 + 3e_2 - 2e_3$, $u_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$.
Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer, par deux méthodes, la matrice B représentative de f dans la base $\mathcal{B}_1$.

Exercice 3

Soif f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini pour tout $(x, y, z) \in E$ par :
$f(x, y, z) = (x, -x - y - z, x + 2y + 2z)$.

1. Donner sa matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de E.
Calculer A^2, reconnaître puis caractériser f.

2. Construire une base $\mathcal{B}$ dans laquelle f est représenté par $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$;
dans cette même base, quelle est la matrice représentant $g = 2f - id_E$?

Exercice 4

Soit $M = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de M et on note $Tr(M)$ la somme de ses termes diagonaux : $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto \mathrm{Tr}\, M$ est linéaire.
Est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Quelle est sa dimension ?

3. Prouver que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(A.B) = \mathrm{Tr}(B.A)$;
en déduire qu'il n'existe aucun couple (A, B) de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que : $AB - BA = I_n$.

4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, A sa matrice dans une base B de $\mathbb{R}^n$ et A' sa matrice dans une base B' de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, A'$.

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

On appelle g la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

2. Montrer qu'il existe un réel a que l'on déterminera tel que $f = ag$;

en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = a^n g$.

Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(e_1) = (5, -1, 2), f(e_2) = (-1, 5, 2), f(e_3) = (2, 2, 2)$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est sa base canonique.

1. Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient $v_1 = (1, 1, -2)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (2, 0, 1)$.

Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Calculer la matrice A' de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ puis $(A')^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Donner l'expression de A^n à l'aide de P, P^{-1} et $(A')^n$.

4. Déterminer la dimension et une base de $\operatorname{Ker} f = G_1$.

5. Déterminer la dimension et une base de $\operatorname{Im} f = G_2$.

6. Les sous-espaces vectoriels G_1 et G_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(e_1) = e_2 + e_3, f(e_2) = e_1 + e_3, f(e_3) = e_1 + e_2$ où $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est sa base canonique.

1. Déterminer $f(u)$ pour tout $u = (x, y, z)$ de E et donner la matrice représentative dans $\mathcal{B}_0$.

2. Prouver(de plusieurs manières) que f est un automorphisme de E.

3. Déterminer les images par f des s-ev de E suivants :

$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in E \mid x = y = z\}$.

4. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E et donner les matrices B et C représentant respectivement la projection p sur F parallèlement à G et la symétrie s sur G parallèlement à F.