Université de Tours
L 2 Licence de Mathématiques

Année 2020 - 2021
T D Analyse S4

T D 1

Suites de fonctions - convergence uniforme

1 Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur l'ensemble I de la suite de fonctions (f_n) dans les cas suivants :

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, \quad n \geq 1, \quad I = [0, +\infty[, \qquad f_n(x) = nx^2 e^{-nx}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad I = [0, +\infty[$$
$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad I = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n(1-x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad I = [0, 1]$$

2 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & si \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.
2) Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.
1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, a]$, $0 < a < 1$, ainsi que sur $[b, +\infty[$, $b > 1$.
3) Montrer que la convergence n'est pas uniforme uniforme sur $[0, 1]$ ni sur $[1, +\infty[$.

4 Soient (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers une fonction f et (x_n) une suite de point de I.

1) Montrer que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ converge vers 0.

2) On suppose de plus que f est continue sur I et (x_n) converge vers $x \in I$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

3) Application: Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

5 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}.$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est elle uniforme sur $[0,+\infty[$?
2) a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a $(x^2+1)e^{-x} \leq 1$.
b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x > 0, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{nx+1}.$$

b) Montrer que convergence est uniformément sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > 0$.

6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = x(1-e^{-nx})$.
1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.
2) Étudier la convergence simple de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.On notera g sa limite.
3) La fonction g est-elle dérivable sur $x \in [0,+\infty[$? Conclure.

7 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \sqrt{x(1-x)^n}.$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.
3) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)^n}\, dt$.

8 Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $[0,\pi/2]$ par : $f_n : x \mapsto n\sin x\cos^n x$.
1) Trouver la limite simple de la suite.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,\pi/2]$.

9 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \left(1-x^2\right)^n.$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f et que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

2) Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$, pour tout $a \in]0, 1[$.
3) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ fixé. Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x)dx \leq \epsilon + \int_\epsilon^1 f_n(x)dx.$$

En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$.