Université François Rabelais de Tours
Département de Mathématiques

Td 4 : Espaces préhilbertiens

Algèbre | Semestre 4, 2019

Exercice 1. Sient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Prouver que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

2. Prouver que si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien (i.e. $\dim(E) < \infty$) alors $\dim(F \cap G)^{\perp} = \dim(F^{\perp} + G^{\perp})$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel dont on note $\|\cdot\|$ la norme issue du produit scalaire et d la distance définie par cette norme. Enoncer et prouver l'inégalité triangulaire pour d puis étudier son cas d'égalité.

Exercice 3. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. On note $H = \{f \in E | f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des applications constantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que H est un hyperplan de E et G une droite vectorielle.

2. En déduire que $E = G \oplus H$.

3. Définir $G^{\perp}$ et $H^{\perp}$.

4. Soit $g \in H^{\perp}$

   (a) Prouver que $\int_0^1 tg(t)^2 dt = 0$.

   (b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = 0$.

   (c) Déterminer $H^{\perp}$.

5. A-t-on $(H^{\perp})^{\perp} = H$? $H \oplus H^{\perp} = E$? $H^{\perp} + G^{\perp} = (H \cap G)^{\perp}$?

Exercice 4. Dans $E = C([-a,a], \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-a}^{a} f(t)g(t)dt$, justifier l'orthogonalité de l'ensemble des fonctions paires et de l'ensemble des fonctions impaires.

Exercice 5. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$, on pose $u = (\sqrt{3}, 1)$ et $v = (1, -1)$. Déterminer la mesure de l'angle géométrique (dans $[0, \pi]$) entre e_1 et u, entre e_1 et v et entre u et v.

Exercice 6. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(0) = 0\}$.

1. Justifier que F est un hyperplan de $E = \mathbb{R}_2[X]$ et en donner une base.

2. On pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

   (a) Justifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   (b) Déterminer l'orthogonal de F.

   Même question pour $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

Exercice 7. Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit sclaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère l'hyperplan H d'équation $x - y + z + t = 0$.

1. Déterminer la matrice $P = M_{\mathcal{B}_0}(p_H)$ où p_H est la projection orthogonale sur H. En déduire la matrice $S = M_{\mathcal{B}_0}(s_H)$ avec s_H la réflexion par rapport à H.

2. Définir puis calculer $\alpha = d(e_1, H)$ (illustrer par une figure).

Exercice 8. Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère le sous-espace vectoriel F d'équations $\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$

1. Les vecteurs $u = (-2, 3, 2, -3)$ et $v = (1, 1, -1, -2)$ appartiennent-ils à F ?
2. Donner une base de F et une base de $F^{\perp}$.
3. Déterminer la matrice représentant p_F, la projection orthogonale sur F, puis celle représentant s_F, la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base $\mathcal{B}_0$.
4. Calculer la distance de u à F puis celle de v à F.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Déterminer l'orthonormalisée $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ de E par le procédé de Gram-Schmidt.
2. Interpréter géométriquement puis calculer
$$\alpha = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 dt.$$
Illustrer par une figure.
3. Jusfitier l'existence et l'unicité de $Q \in E$ tel que $\forall P \in E, P'(0) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, puis déterminer Q.

Exercice 10. Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère les quatre vecteurs suivants :
$$u_1 = (0, 1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 0, 1), \text{ et } u_4 = (1, 1, 1, 0).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E. Est-elle orthogonale ?
2. Orthonormaliser $\mathcal{B}$ par la méthode de Gram-Schmidt.
3. On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.
   (a) Déterminer la matrice représentant p_F, la projection orthogonale sur F, dans la base $\mathcal{B}_0$.
   (b) Calculer $\alpha = d(u_3, F)$.

Exercice 11. Sur $E = M_n(\mathbb{R})$, on définit la forme bilinéaire b par $b(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$.

1. Justifier que b définit un produit scalaire sur E.
2. Etablir que les espaces S_n des matrices symétriques et A_n des matrices antisymétriques sont des supplémentaires orthogonaux.
3. En déduire la distance d'une matrice A à S_n (pour la distance associée au produit scalaire b).

Exercice 12 (Matrices de Gram)**.** A chaque famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs ($n \in \mathbb{N}^*$) d'un espace préhilbertien réel, on associe sa matrice et son déterminant de Gram respectivement définis comme suit :
$$G(u_1, \ldots, u_n) = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad g(u_1, \ldots, u_n) = \det(G(u_1, \ldots, u_n)).$$

1. Prouver que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée si et seulement si $g(u_1, \ldots, u_n) = 0$. On suppose désormais que la famille est libre et on pose $F = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
2. Quelle est la dimension de F ? Que représente alors $G(u_1, \ldots, u_n)$?
3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F.
   (a) Prouver que $G(u_1, \ldots, u_n) = {}^tPP$ avec P la matrice de passage de $(u_1, \ldots, u_n)$ à $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire que $g(u_1, \ldots, u_n) > 0$.
4. Déduire de ce qui précède une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de son cas d'égalité.
5. Prouver que pour tout $v \in E$, on a
$$d(v, F)^2 = \frac{g(u_1, \ldots, u_n, v)}{g(u_1, \ldots, u_n)}.$$
6. Retrouver, grâce à cette formule, le résultat de la dernière question de l'exercice 10. Commenter.