Logique pour l'informatique

Chapitre IIa — Logique des Propositions (LP) : modélisation et calcul booléen

LOGIQUE DES PROPOSITONS - Objectifs

2.1. Notions

2.1.1. Logique des propositions : que peut-on modéliser avec ?
2.1.2. Syntaxe et formule bien formée (fbf)
2.1.3. Connecteur logique et système complet de connecteurs
2.1.4. Table de vérité
2.1.5. Forme normale (conjonctive, disjonctive)
2.1.6. Fonction booléenne : tableau de Karnaugh

2.2. Pratiques

2.2.1. Représenter un énoncé ou un problème en logique des propositions et savoir quand cette logique est insuffisante
2.2.2. Calculer les interprétations d'une fbf de LP à l'aide d'une table de vérité. S'en servir pour montrer des propriétés de tautologie, contradiction, équivalence
2.2.3. Trouver le modèle d'une fbf par intuition ou calcul de ses interprétations
2.2.4. Construire le tableau de Karnaugh associé à une fbf
2.2.5. Mettre une formule sous sa forme normale minimale par des méthodes différentes (formules d'équivalence ou tableau de Karnaugh)
2.2.6 Trouver la formule logique qui réalise une fonction booléenne donnée (Karnaugh)

2.3. Approfondissement

2.3.1. Montrer qu'un système de connecteurs est complet

Exemple

Si le drapeau est vert et si je suis raisonnable alors je ne me baigne pas
Je peux me noyer ssi je ne suis pas raisonnable ou je ne sais pas nager
Le drapeau est rouge et je me baigne

Je risque la noyade

Atome

Jugement de base irréductible : *drapeau_vert*

Connecteurs logiques

Négation	$\neg$	*Ne … pas*
Conjonction	$\wedge$	*Et*
Disjonction	$\vee$	*Ou*
Implication	$\Rightarrow$	*Alors*
Équivalence	$\Leftrightarrow$	*Ssi*

Exemple

$drapeau\_vert \wedge raisonnable \Rightarrow \neg baigne$

$noyer \Leftrightarrow \neg raisonnable \vee \neg nageur$

$\neg drapeau\_vert \wedge baigne$

$noyer$

Négation	$\neg$	*Ne … pas*
Conjonction	$\wedge$	*Et*
Disjonction	$\vee$	*Ou*
Implication	$\Rightarrow$	*Alors*
Équivalence	$\Leftrightarrow$	*Ssi*

LP : SYNTAXE DU LANGAGE FORMEL

Vocabulaire

Symboles représentant les atomes : chaînes de caractères
Symboles des connecteurs logiques : { $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\neg$, ..}
Symboles de parenthésage : { (,) }

Règles de construction des formules bien formées (fbf)

- Tout atome P est une fbf de la LP
- Si F est une fbf, alors (F) est une fbf
- Si F est une fbf alors $\neg$F est une fbf
- Si A et B sont deux fbd, alors les formules suivantes sont des fbf : A $\wedge$ B, A $\vee$ B, A $\Leftrightarrow$ B, A $\Rightarrow$B

Exemple et contre-exemples

$\neg\neg\neg$ P	$\neg$Q $\wedge$ P
$\neg$(Q $\wedge$ P)	$\neg$QQ $\wedge$ PP
$\neg$Q $\wedge$ $\wedge$ P	P $\neg$Q

Priorités d'application des connecteurs logiques

$\neg$ prioritaire sur { $\wedge$, $\vee$ } prioritaire sur { $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ }

Exemple

il est riche et (mais) il n'est pas beau
il n'est pas beau et riche (à la fois)
il n'est ni riche ni beau

- **Compositionnalité de la LP (Calul Booléen)**

  La valeur de vérité d'une fbf de la LP dépend uniquement :

  - de l'interprétation des atomes qui la composent
  - de l'emploi des connecteurs logiques entre ces atomes

- **Tables de vérité**

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V

P	$\rceil$P
V	F
F	V

- **Autres connecteurs :** $\oplus$: Ou exclusif, $\uparrow$: Non-Et, $\downarrow$: Non-Ou, ...

FORMULES D’EQUIVALENCE DE LA LP

Équiv. connecteurs	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
Double négation	$\neg\neg P \equiv P$
Lois de Morgan	$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
	$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Idempotence	$P \vee P \equiv P \wedge P \equiv P$
Commutativité	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Associativité	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \equiv P \wedge Q \wedge R$
	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \equiv P \vee Q \vee R$
Contradiction	$P \wedge \neg P \equiv$ **Faux**
Tiers-exclus	$P \vee \neg P \equiv$ **Vrai**
Distributivité	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Absorption	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

FORMES NORMALES

Système complet de connecteur $\{ \neg , \wedge , \vee \}$

Littéral On appelle littéral tout atome ou sa négation

Exemples : Q ou $\neg$R

Forme normale conjonctive

Une fbf de LP est dite sous forme normale conjonctive (fnc) ssi elle se compose d'une conjonction de disjonctions de littéraux

Exemple : $(P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge \neg P$ mais aussi …. $P \vee Q$

Forme normale disjonctive

Une fbf de LP est dite sous forme normale disjonctive (fnd) ssi elle se compose d'une disjonction de conjonctions de littéraux

Exemple : $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee \neg P$ mais aussi …. $P \wedge Q$

FORMES NORMALES

Toute fbf de LP admet une fnc et une fnd (minimales) uniques (à une commutation prête) qui lui sont logiquement équivalentes.

Algorithme de mise sous forme normale

1) **Passage dans le système complet { $\rceil$, $\vee$, $\wedge$ }**

Remplacement des $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ par équivalence

2) **Réduction des négations**

Lois de De Morgan + double négation

3) **Distributivité + commutativité + absorption**

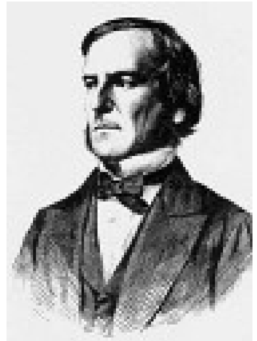
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ pour la fnc

$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ pour la fnd.

FONCTIONS BOOLEENNES

On appelle fonction booléenne toute fbf de la LP exprimée uniquement au moyen des opérations de l'algèbre de Boole :

- addition (+)	disjonction ($\vee$)
- multiplication (.)	conjonction ($\wedge$)
- complémentation ($\overline{}$)	négation ($\rceil$)



Sir John Boole
(1815-1864)

Exemple

$f(P,Q,R) = (P \wedge Q) \vee (Q \wedge \rceil R)$ foncθ booléenne de P, Q et R

Problème classique

Retrouver l'expression d'une fonction booléenne à partir de sa table de vérité.

⇨ mintermes / maxtermes

⇨ tableaux de Karnaugh

Minterme / Maxterme

Minterme Toute conjonction de littéraux pour lesquels la fonction booléenne est vraie.

Maxterme Toute disjonction des littéraux t.q. la fonction est fausse quand le littéral est faux,

P	Q	F1(P,Q)	
V	V	V	minterme : $P \wedge Q$
V	F	V	minterme : $P \wedge \neg Q$
F	V	F	maxterme : $P \vee \neg Q$
F	F	V	minterme : $\neg P \wedge \neg Q$

Passage d'une fonction booléenne à son expression logique

fnd disjonction des mintermes de la fonction

fnc conjonction des maxtermes de la fonction

Exemple

fnd $f1(P,Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

fnc $f1(P,Q) \equiv P \vee \neg Q$

Impliquant

On appelle **impliquant** d'une fonction booléenne *f* toute conjonction *c* de littéraux telle que aucune des variable (atome) de la fonction *f* ne peut rendre en même temps *c* vraie et *f* fausse

Tables de Karnaugh

Fnd conjonction des impliquants issus des mintermes

↳ développement par les « V »

Fnc équivalence avec maxtermes

↳ développement par les « F »

Table de Karnaugh à 2 variables

P \ Q	F	V
F	V	F
V	V	V

P

$\neg Q$

P \ Q	F	V
F	V	F
V	V	V

$\text{fnc} \equiv \text{fnd} \equiv P \vee \neg Q$

$P \vee \neg Q$

Table de Karnaugh à 3 variables

$f \equiv (\neg Q \wedge \neg R) \vee P$

PQ \ R	F	V
FF	V	F
FV	F	F
VV	V	V
VF	V	V

PQ \ R	F	V
FF	V	F
FV	F	F
VV	V	V
VF	V	V

$f \equiv (P \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q)$

Logique pour l'informatique

Chapitre IIb — Déduction en Logique des Propositions : résolution

LOGIQUE DES PROPOSITIONS (Déduction) - Objectifs

2.1. Notions

2.1.7. Forme clausale
2.1.8. Principe de réfutation : que dit-il vraiment ? Formule de réfutation
2.1.9. Règle et principe de résolution : que montre-t-il vraiment ?

2.2. Pratiques

2.2.7. Montrer la validité d'un raisonnement en partant de la définition de la conséquence logique : tables de vérité
2.2.8. Montrer la validité d'un raisonnement par des méthodes plus complexes (transformation sur la formule de réfutation, méthode de résolution)
2.2.9. Appliquer ces méthodes à des cas particulier : validité ou contradiction

2.3. Approfondissement

2.3.2. Démontrer le principe de réfutation et la méthode de résolution en LP

Rappel Un raisonnement logique est valide ssi sa conclusion est la conséquence logique de ses prémisses. On note alors :

$$P1, ..., Pn \quad \models \quad C$$

Méthode des tables de vérité

Application directe de la définition de la conséquence logique : il suffit d'évaluer à l'aide d'une table de vérité l'ensemble des modèles de $P1 \wedge ... \wedge Pn$ constituent des modèles de C

Principe de déduction par réfutation (théorème)

Pour montrer que $P1, ..., Pn \models C$ (raisonnement valide) il faut et il suffit de montrer que la **formule de réfutation** $\mathcal{F}r \equiv P1 \wedge ... \wedge Pn \wedge \neg \mathbf{C}$ est contradictoire

On dit alors qu'on a montré la validité par réfutation de la conclusion

LOGIQUE DES PROPOSITIONS : RESOLUTION

Clause On appelle **clause** toute disjonction d'atome ou de littéraux d'atome. Exemples : $P \vee Q$ ou $P \vee \neg Q$

Forme clausale Une formule est dite sous **forme clausale** si elle se présente comme une conjonction de clauses

Remarque — En LP, forme normale = fnc

Règle de résolution

(Herbrand, Robinson)

> Soient (S1) et (S2) deux clauses appartenant à une formule (S) mise sous forme clausale. S'il existe un atome L tq $L \in (S1)$ et $\neg L \in (S2)$ alors la clause : $(R) \equiv (S1 \setminus \{L\}) \cup (S2 \setminus \{\neg L\})$ dite **résolvante** de (S1) et (S2) est une conséquence logique de (S1) et (S2)

Corollaire : (S) et $(S) \cup (R)$ sont logiquement équivalentes

Exemple — $(S1) = P \vee Q$, $(S2) = R \vee \neg Q$ alors $res(S1,S2) = P \vee R$

Méthode de résolution de Robinson

Pour montrer qu'une formule (S) est contradictoire, il faut et il suffit de produire la clause vide par résolution de l'ensemble des clauses issues de (S) mise sous forme clausale

Soit un raisonnement dont on cherche à montrer la validité

1 — Construction de la formule de réfutation associée

2 — Mise sous forme clausale de la formule de réfutation ($\mathcal{F}r$)

3 — Tq la clause vide n'appartient pas à ($\mathcal{F}r$) ou bouclage

3.1. appliquer la résolution sur 2 clauses de ($\mathcal{F}r$)

3.2. ajouter la résolvante à ($\mathcal{F}r$)

4 — Si clause vide : raisonnement valide. Sinon, non valide.

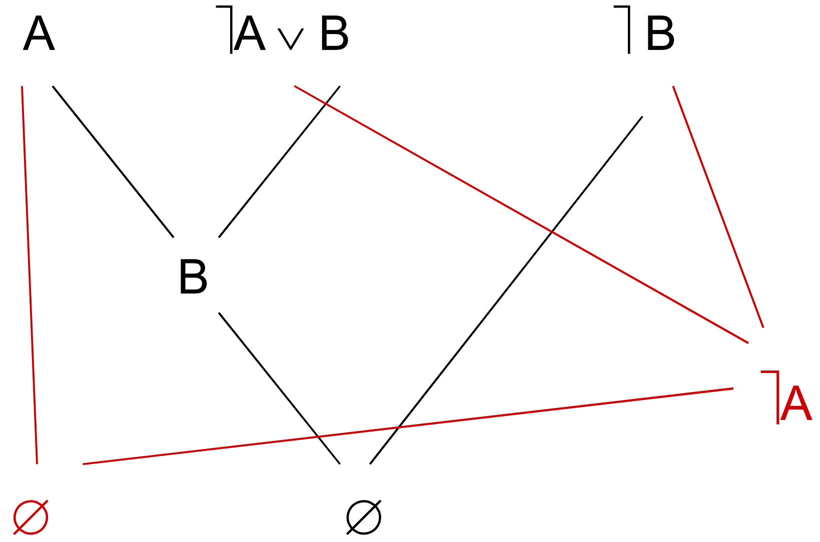
Méthode de résolution de Robinson : exemple

Modus ponens A, A $\Rightarrow$ B a-t-il pour conséquence logique B ?

Formule de réfutation $\mathcal{F}r \equiv A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge \neg B$

Formule clausale $\mathcal{F}r \equiv A \wedge (\neg A \vee B) \wedge \neg B$ trois clauses

Résolution



2 démonstrations

$\mathcal{F}r$ contradictoire donc

Raisonnement valide