Exercices supplémentaires

Pour progresser

1 Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx\,, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)\, dx\,, \quad I_3 = \int_1^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin x}{x}\right) - 1\right) dx$$

$I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$. (Utiliser le changement de variable $y = x^2$)

2 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une foction continue. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui vérifient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n}^{y_n} f(t)\, dt = 0.$$

2) Application : Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-t\sin t}\, dt \geq \pi.$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}\, dt$ est divergente.

3 Soit α un réel. On cosidère les intégrales

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}\, dt \quad \text{et} \quad J_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}\, dt$$

1) On suppose que $\alpha > 1$. Montrer que I_α et J_α sont convergentes.

2) Pour tout réel α , on désigne par f_α et g_α les fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \geq 1, \quad f_\alpha(t) = \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad g_\alpha(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}.$$

a) Calculer $(1-\alpha)f'_{\alpha-1}(t) + g'_{\alpha-1}(t)$ et $(1-\alpha)g'_{\alpha-1}(t) - f'_{\alpha-1}(t)$.

b) En déduire que pour tout réel $\alpha > 1$, on a

$$I_\alpha = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} \quad \text{et} \quad J_\alpha = \frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha + 2}.$$

3) Montrer que pour tout réel $\alpha \leq 1$, les intégrales I_α et J_α sont divergentes.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 1) Montrer que pour tous réel $a > 0$ les intégrales généralisées

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$$

sont convergentes. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$.

2) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $M > 0$, on pose $I(\varepsilon, M) = \displaystyle\int_\varepsilon^M \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$.

A l'aide du changement de variable $x = \dfrac{a^2}{t}$. Montrer que

$$I(\varepsilon, M) = -2\ln(a) \int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/M} \frac{dx}{a^2 + x^2} + \int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/M} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx.$$

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$. En déduire que $I = \dfrac{\pi}{2a} \ln a$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ On rappel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

1) a) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ est convergente.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $M > 0$, on pose $I(\varepsilon, M) = \displaystyle\int_\varepsilon^M \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.

A l'aide d'une intégration par paties, montrer que

$$I(\varepsilon, M) = \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1 - \cos M}{M} + \int_\varepsilon^M \frac{\sin x}{x} dx.$$

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

2) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ est convergente et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Indication : On rappel que $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

1) Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Calculer I_1.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = (n+1)I_n$.

3) On admet que $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!.$$