Université de Tours 2021/2022

L2-Math : Analyse 3

Contrôle continu 2

Durée : 2 heures

Les documents et les dispositifs électroniques de calcul (calculatrices, smartphones,...) sont interdits.

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants. La plupart des questions peuvent être traitées sans avoir sû répondre à la précédente. Le correcteur tiendra compte de la qualité de rédaction.

Exercice 1.

1) Déterminer si les séries ci-dessous sont convergentes ou divergentes

$$\sum \frac{1}{(n+1)^{4/3}} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}$$

2) Déterminer alors si la série $\sum \Big(\exp\big(\frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}\big) - 1 \Big)$ est convergente.

Exercice 2. Déterminer si les intégrales ci-dessous sont convergentes ou divergentes

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2+4)e^{-t}dt$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}(1+2\sin(t))dt$

Déterminer si les séries ci-dessous sont convergentes ou divergentes

- $\displaystyle\sum \frac{(n^2+1)2^n}{5^n+3}$
- $\displaystyle\sum \frac{\sin(n^2)}{n^2}$

Exercice 3. On considère $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 3\}$. Après avoir dessiné D, calculer l'intégrale double :

$$\iint_D y\ln(x^2+y^2)dxdy$$

On pourra penser à exprimer cette intégrale en coordonnées polaires.

suite au verso

Exercice 4. On se propose d'étudier la série $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$.

1) Montrer que la série est convergente.
2) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 x^{2k}(1-x)dx$.
3) Montrer alors que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx - \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}(1-x)}{1+x^2}dx$$

4) Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx.$
5) Calculer alors $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx$ et en déduire $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$