L2-Math : Analyse 3

Contrôle continu 2

Durée : 2 heures

Les documents et les dispositifs électroniques de calcul (calculatrices, smartphones,...) sont interdits.

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants. La plupart des questions peuvent être traitées sans avoir sû répondre à la précédente. Le correcteur tiendra compte de la qualité de rédaction.

Exercice 1.

1) Déterminer si les séries ci-dessous sont convergentes ou divergentes

$$\sum \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

2) Déterminer alors si la série $\sum \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}-1\right)$ est convergente.

Exercice 2. Déterminer si les intégrales ci-dessous sont convergentes ou divergentes

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t+4}dt$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin(\frac{1}{t})dt$

Déterminer si les séries ci-dessous sont convergentes ou divergentes

- $\displaystyle\sum \frac{n-2^n}{3^n-\sqrt{n}}$
- $\displaystyle\sum (1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$

Exercice 3. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue croissante et telle que $\lim_{+\infty} f = \ell$. On va étudier l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{+\infty} \big(f(t+1) - f(t)\big)\, dt$$

1) On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^x \big(f(t+1) - f(t)\big)\, dt$. Montrer que

$$I(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dt - \int_0^1 f(t)\, dt$$

2) Montrer que $f(x) \leq \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x+1)$. En déduire que I est une intégrale convergente et calculer sa valeur.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\, dt$.

4) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\arctan(t+1) - \arctan(t)\big)\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 4. On se propose d'étudier la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k}$.

1) Montrer que la série est convergente.

2) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{4^k}$.

3) Montrer alors que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k} = \int_0^1 \frac{4}{4-x^2}dx - \int_0^1 \frac{1}{4^n}\frac{x^{2n+2}}{4-x^2}dx$$

4) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k} = \int_0^1 \frac{4}{4-x^2}dx$.

5) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\frac{4}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$.

6) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{4-x^2}dx$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k}$