Université de Tours– L2– Géométrie 2020-2021

Feuille 2

Exercice 1

1. Démontrer que pour toute matrice S orthogonale indirecte, il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ de sorte que
$$S = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. En déduire que $S_\theta u_{\theta/2} = u_{\theta/2}$ et $S_\theta u_{\theta/2+\pi/2} = -u_{\theta/2}$. S_θ est une symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}u_{\theta/2}$

3. Déterminer la matrice de la rotation qui envoie le vecteur $(2,4)$ sur le vecteur $(1-\sqrt{3}, \sqrt{3}-2)$

4. Déterminer la matrice de la symetrie orthogonale qui envoie le vecteur $(1,0)$ sur le vecteur $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

5. Déterminer la matrice de la projection orthogonale d'image $D := \{(x,y) \,:\, y = 0\}$

Exercice 2

1. Etant données deux droites vectorielles de vecteur directeur respectif $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On supposera que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une famille libre.

1. Donner l'expression vectorielle de la projection sur $Vect(\vec{u})$ parallélement à $Vect(\vec{v})$ quand $\vec{u}, \vec{v}$ sont respectivement les vecteurs de la base canonique $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

2. Donner l'expression vectorielle de la projection sur $Vect(\vec{u})$ parallélement à $Vect(\vec{v})$ dans le cas général.

3. Représenter graphiquement $\vec{u}, \vec{v}$ et construire géométriquement $p(\vec{w})$ pour un vecteur $\vec{w}$. Vérifier géométriquement que p est bien linéaire.

4. On pose $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{u} = \vec{e}_1$. Donner la matrice de p dans la base canonique.

5. Montrer qu'il existe exactement deux symétries orthogonales S_1 et S_2 qui envoient $Vect(\vec{u})$ sur $Vect(\vec{v})$.

6. **2.** Soit Δ_1 (resp. Δ_2) la droite invariante par S_1 (resp. S_2). Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

Exercice 3

On utilisera les notations de l'exercice 1 et on notera

$$R = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

1. Calculer l'inverse de S_θ puis calculer $S_\phi^{-1} R_\theta S_\phi$.

2. Calculer l'inverse de R_θ puis calculer $R_\phi^{-1} S_\theta R_\phi$.

3. En vous inspirant de la preuve vue en cours pour établir que $\langle Ru, Rv\rangle = \langle u, v\rangle$, en déduire que $\langle Su, Sv\rangle = \langle u, v\rangle$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}*$ il existe sous-groupe de $O^+(2)$ qui soit de cardinal n.

5. Trouver un sous-groupe de cardinal deux inclus dans $O(2)$ mais pas dans $O^+(2)$

6. Montrer que $O(2)$ n' est pas commutatif.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe sous-groupe de G de $O(2)$ qui soit de cardinal $2n$ et tel que $G \not\subset O^+(2)$

Exercice 4
a) Dans la base orthonormale canonique trouver l'expression de la matrice de la projection orthogonale S_1 autour de la droite vectorielle d'équation $\sqrt{3}x - y = 0$.
b) Dans la base orthonormale canonique trouver l'expression de la matrice de la symétrie orthogonale S_1 autour de la droite vectorielle d'équation $\sqrt{3}x - y = 0$.
b) On compose avec la symétrie orthogonale S_2 autour de la droite d'équation $x + \sqrt{3}y = 0$. Décrire l'isométrie $S_2 \circ S_1$ et calculer la matrice qui la représente dans la base canonique.
c) Soit J l'application linéaire définie par $J(x, y) = (-y, x)$. Quelle application est représentée par la matrice $J \circ R_{\pi/3}$?
d) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équation $x - y = 0$.

Exercice 5
On considère les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4x+2y}{5} \\ \frac{2x+y}{5} \end{pmatrix}, \quad G\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix} \qquad H\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$I\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}, \quad J\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x-y \\ y+y \end{pmatrix} \tag{4}$$

Pour chacune de ces applications préciser lesquelles sont linéaires, lesquelles sont des isométries, et tentez de les reconnaitre si possible (projections, symmétries, rotations, translations, autres...)
Exercice 6
On considère

$$\mathcal{N} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\right\} \tag{5}$$

1 Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-groupe des matrices inversibles $GL(2, \mathbb{R})$ pour le produit de matrices.
2 Montrer que $\mathcal{N}$ est isomorphe au groupe additif des réels
(on rappelle qu'un isomorphisme $f : G \longrightarrow H$ d'un groupe $(G, .)$ dans un groupe $(H, .)$ est une bijection telle que $f(g.g') = f(g).f(g')$, $\forall g, g' \in G$).
3 Soit $v \in \mathbb{R}^2$; décrire $\mathcal{N}.v := \{N.v \quad : N \in \mathcal{N}\}$ en fonction de v.
4 Montrer que les éléments de $\mathcal{N}$ conservent la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = yy' \tag{6}$$

On considère

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \right\} \tag{7}$$

4 Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-groupe des matrices inversibles $GL(2,\mathbb{R})$ pour le produit de matrices.
5 Montrer que $\mathscr{A}$ est isomorphe au groupe multiplicatif des réels non nuls.
6 Soit $v \in \mathbb{R}^2$; décrire $\mathscr{A}.v := \{A.v \quad : A \in \mathscr{A}\}$ en fonction de v.

7 Montrer que $O^+(2)$ est isomorphe au groupe multiplicatif des complexes de module un.
8 Soit $v \in \mathbb{R}^2$; décrire $O^+(2).v := \{R.v \quad : R \in O^+(2)\}$ en fonction de v.

Exercice 7

1. Etant données trois droites vectorielles de vecteur directeur respectif $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On supposera que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w},\}$ est une famille libre.

1. donner l'expression vectorielle de la projection sur $Vect(\vec{u})$ parallélement à $Vect(\vec{v}, \vec{w})$ quand $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont respectivement les vecteurs de la base canonique $\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3$
2. donner l'expression vectorielle de la projection sur $Vect(\vec{v}, \vec{w})$ parallélement à $Vect(\vec{u})$ quand $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont respectivement les vecteurs de la base canonique $\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3$
3. donner l'expression vectorielle de la projection p_1 sur $Vect(\vec{u})$ parallélement à $Vect(\vec{v}, \vec{w})$dans le cas général.
4. donner l'expression vectorielle de la projection p_2 sur $Vect(\vec{u}, \vec{v})$ parallélement à $Vect(\vec{w})$dans le cas général.
5. On pose $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_2, \vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{w} = \vec{e}_1$. Donner les matrices de p_1 et p_2 dans la base canonique.