Université de Tours/UFR Sciences & Techniques — Année 2019-2020
Licence de Mathématiques — L2 semestre 2

CC1 Analyse 4 , durée : 2h

Les calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés. Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{n\ln(1+x)}{n+x}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f qu'on déterminera .
2. Calculer $|f_n(n) - f(n)|$. En déduire que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,a]$.
4. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \,.$$

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-x/n}}{1+x}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f qu'on déterminera .
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,+\infty[, \qquad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{n}.\frac{x}{1+x}$$
3. Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniforme sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{x}{x+n}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On désigne par $S(x)$ sa somme
2. Montrer que la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ n'est pas normale sur $[0,+\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[0,a]$.
4. Montrer que S est continue sur $[0,+\infty[$.
5. Montrer que S est dérivable sur $[0,+\infty[$.
6. Soit maintenant la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n$. Montrer qu'elle converge simplement sur $[0,+\infty[$ et que sa fonction somme T est continue sur $[0,+\infty[$.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,\pi]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n\,sin(nx) & \text{si } x \in [0, \dfrac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,\pi]$, et trouver sa limite simple f.
2. Déterminer $\sup\limits_{x\in[0,\pi]} f_n$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi]$?
3. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^\pi f(t)dt$ (Indic : utiliser la relation de Chasles sur $[0,\pi] = [0,\pi/n] \cup [\pi/n,\pi]$). Retrouver la conclusion de la question précédente.

Soit $a \in]0,\pi[$.

4. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,\pi]$?
5. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a,\pi]$?