Chapitre 4

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ comme espaces affines

4.1 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ comme espace affine euclidien

Rappel : on a vu $\mathbb{R}^2$ (resp.$\mathbb{R}^n$) peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et il peut donc aussi être vu comme un comme plan affine (resp. espace affine) euclidien. Précisons quelques définitions d' objets majeurs (espace affine, sous-espace affine , barycentre) avant de retrourner aux objets géométriques du plan affine euclidien.

4.1.1 Espace affine

Définition 4.1. *On appelle espace affine $\mathcal{E}$ associé à l'espace vectoriel $\vec{E}$, un ensemble de points tel qu'à tout couple de points (A,B) on puisse associer un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ avec les propriétés suivantes :*

1. *Pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.*
2. *Pour tous points A, B et C, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles).*
3. *Si O étant un point quelconque de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\vec{E}$, il existe un unique point A de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$.*

Exemple : $\mathbb{R}^n$ est un espace affine associé à $\mathbb{R}^n$ (strange n'est ce pas). en effet si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux n-uplets On peut définir $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$ qui est bien un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et les propriétés ci-dessus sont satisfaites.....

Donnons un autre exemple : $\mathcal{E} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(0) = 1\}$ est un espace affine de direction l'espace vectoriel $\vec{E} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(0) = 0\}$. En effet si on a deux fonction f et g de $\mathcal{E}$ $f - g \in \vec{E}$ et il est aussi facile de véirifer 1) , 2) et 3) que dns $\mathbb{R}^n$.

La propriété 3 de la définition dit qu'un espace affine est un espace vectoriel "accroché" à n'importe quel point de l'espace.

La notion d'espace affine est intéressante car comme cela on pourra accrocher des vecteurs à un point M même si celui-ci bouge !

Définition 4.2. *Un repère de l'espace affine $\mathcal{E}$ est constitué d'un point quelconque O (que l'on appelle origine) de $\mathcal{E}$ et d'une base quelconque de $\vec{E}$.*

Exemple : $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ pour l'espace et $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour le plan.

Définition 4.3. *Un espace affine $\mathcal{E}$ est euclidien s'il est associé à un espace vectoriel euclidien. A deux points A et B de $\mathcal{E}$, on peut alors associer un réel appelé distance entre A et B et noté $d(A, B)$ défini par : $d(A, B) = ||\vec{AB}||$.*

Exemple : l'espace ambiant ou encore espace physique peut être sans dommage assimilé à l' espace affine $\mathbb{R}^3$. Le plan d'une feuille de papier à $\mathbb{R}^2$, plan affine. On va commencer par donner des notions qui pourront être généralisées à $\mathbb{R}^n$ en tant qu'affine et on reviendra ensuite sur le cas particulier de $\mathbb{R}^2$ et celui de $\mathbb{R}^3$.

4.1.2 Sous-espace affine

Définition 4.4. Sous-espace affine *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\vec{E}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble non vide et $A \in \mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.*

Proposition 4.1.

1. *Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine, $\{\overrightarrow{NM}, N, M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.*
2. *Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine, sa direction est $\vec{F} = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$.*

Définition 4.5. *Un sous-espace affine de dimension* 1*(resp.* 2*) est appelé droite affine (resp. plan affine).*

Rem : $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, Vect(\vec{u})) = A + Vect(\vec{u})$, $\mathcal{P} = A + Vect(\vec{u}, \vec{v})$. La proposition (3.1) dit que $\mathcal{F}$ peut-être défini par n'importe quel autre point
Exemples :
Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, Vect(\vec{u}))$, c'est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que la famille $(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$ est liée

dans $\mathbb{R}^3$ on peut définir $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, Vect(\vec{u}))$, qui est toujours l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que la famille $(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$ est liée.

Mais on peut aussi définir des plans affines $\mathcal{P} = A + Vect(\vec{u}, \vec{v})$ à l'aide de la famille libre $(\vec{u}, \vec{v})$. C'est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que la famille $(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$ est liée

Et comme dans le cas des espaces vectoriels (mais avec une nuance), on a bien sûr stabilité par intersection , c'est à dire que :

Proposition 4.2. *1. Une intersection de sous-espaces affines d'un même sous-espace affine $\mathcal{E}$ est soit vide soit c'est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction l'intersection des directions.*

2. Si $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, l'intersection de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ qui contiennent tous els points de $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, c 'est le plus petit sous-espace affine $Aff(\mathcal{A})$ qui contient $\mathcal{A}$ et on le nomme **sous-espace affine engendré par $\mathcal{A}$ ou par les points** $(A_0, A_0, A_1, \ldots, A_k)$

3. $Aff(\mathcal{A}) = A_0 + Vec(\{\overrightarrow{A_0M}, M \in \mathcal{A}\}) = A_0 + Vec(\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\})$.

Preuve : 1) Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de direction $\vec{F}$ et $\vec{G}$. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, il existe un point $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ et pour tout $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ le vecteur $\overline{AM} \in \vec{F} \cap \vec{G}$ et réciproquement si on prend un vecteur $\vec{u}$ de $\vec{F} \cap \vec{G}$ d'après le point 3) des axiomes d'espaces affines , il existe un point M tel que $\vec{u} = \overline{AM}$ et comme $\vec{u} \in \vec{F} \cap \vec{G}$ $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ce qui établit le point 1).
2) C'est clair, vu la propriété d'intersection et le fait qu'ici tous les A_i sont dans l'intersection donc elle est non vide !
Et la preuve de la propriété "c 'est le plus petit sous-espace affine" se fait comme dans les espaces vectoriels.
3) $\mathcal{F} = A_0 + Vec(\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\})$ est un sous-espace affine d'après la définition et il contient tous les A_i donc $Aff(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$. Mais d'autre part comme tous les A_i sont dans $Aff(\mathcal{A})$, alors tous els vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$, pour $i = 1, \ldots, k$ sont dans la direction $\vec{G}$ de $Aff(\mathcal{A})$ donc
$Vec(\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\}) \subset \vec{G}$ et $\mathcal{F} \subset Aff(\mathcal{A})$. □

Exemples fondamentaux :
1) Droite $\mathcal{D}(A, B)$ engendrée par 2 points : c'est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que la famille $(\overrightarrow{AM}, \vec{AB})$ est liée.
2) Plan engendré par trois points A, B, C non alignés ($\mathcal{D}(A, B) \neq \mathcal{D}(A, C)$ ou encore la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre) : C'est l'ensemble des points $M \in ce$ tels que $(\overrightarrow{AM}, \vec{AB}), \overrightarrow{AC})$ est liée.

4.2 Barycentres

La notion de barycentre est l'analogue de la notion de combinaisons linéaires

4.2.1 Définition

Définition 4.6. Fonction de Leibniz
Etant donnés k points $(A_1, \ldots, A_k)$ de $\mathcal{E}$ et k scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. On désigne par φ la fonction, dite de Leibniz, qui a tout point $M \in \mathcal{E}$ associe $\varphi(M) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_i M}$.

Un calcul mené grâce à la relation de Chasles nous dit que

$$\varphi(M) = \lambda \overrightarrow{OM} + \varphi(O), \qquad \text{où } \lambda = \sum_i \lambda_i.$$

φ est donc une fonction constante si jamais $\lambda = 0$ et sinon il existe un unique point G de sorte que $\varphi(G) = \vec{0}$.

Définition 4.7. *Barycentre de points pondérés*
Etant donnés k points $(A_1, \ldots, A_k)$ de $\mathcal{E}$ et k scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ de sorte que $\sum_i \lambda_i. \neq 0$. On appelle barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_i$, l'unique point tel que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_i G} = \vec{0} \tag{4.1}$$

ou de façon équivalente

$$\forall P \in \mathcal{E}, \quad (\sum_{i=1}^k \lambda_i) \overrightarrow{PG} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{PA_i} \tag{4.2}$$

Quand tous les poids sont identiques on parle d'isobarycentre, par exemple le milieu de A et de B.

Rem : Si M est barycentre $(A, t), (B, (1-t)$, on peut sans dommage le noter $M = tA + (1-t)B$....

4.2.2 Lien barycentres et sous-espace affines

Etant donnés deux points A, B de l'espace affine $\mathcal{E}$, , qu'est ce que l'ensemble $\mathcal{D} = \{M = Bar((A,\alpha),(B,\beta)), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha + \beta \neq 0\}$? Soit $M \in \mathcal{D}$ on a donc $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et par la relation de Chasles

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB}$$

donc comme $\alpha+\beta\neq 0$, $M\in(AB)$
Réciproquement , si $M\in(AB)$ il existe un réel t de sorte que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ ou encore $M=Bar(A,(1-t),(B,t))$ (pensez à (3.2) avec $P=A$) et $M\in\mathcal{D}$.
On vient de démontrer que $\mathcal{D}=(AB)$.
De même l'ensemble des barycentres de trois points A,B,C non alignés est le plan $\mathcal{P}(A,B,C)$ passant par ces trois points .
Ainsi les barycentres sont un outil affine incontournable qui est l'analogue des combinaisons linéaires dans les espaces vectoriels car :

Proposition 4.3. *Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine si est seulement si elle est stable par " barycentrification" . En particulier , $Aff(\mathcal{A})$ est l'ensemble des barycentres des points de $\mathcal{A}$.*

4.2.3 Propriétés fondamentales pour la géométrie

Théorème 4.1. Propriétés fondamentales

1. *Homogénéité : Si $G=Bar(A_i,\lambda_i)_i$,pour tout $\mu\neq 0$, il est aussi le barycentre $(A_i,\mu\lambda_i)_i$.*
2. *"Commutativité" : Si $G=Bar(A_i,\lambda_i)_i$,pour tout $\sigma\in$, il est aussi le barycentre $(A_{\sigma(i)},\lambda_{\sigma(i)})_i$.*
3. *Associativité : Si $G=Bar(A_i,\lambda_i)_{i\in I}$, et si $I=J\cup K$ avec $\mu_K=\sum_{k\in K}^{k}\lambda_k\neq 0$, et si G_K désigne le barycentre du système de points pondérés $(A_k,\lambda_k)_{k\in K}$, G est aussi le barycentre $((A_i,\lambda_i)_{i\in J},(G_K,\mu_K)$.*

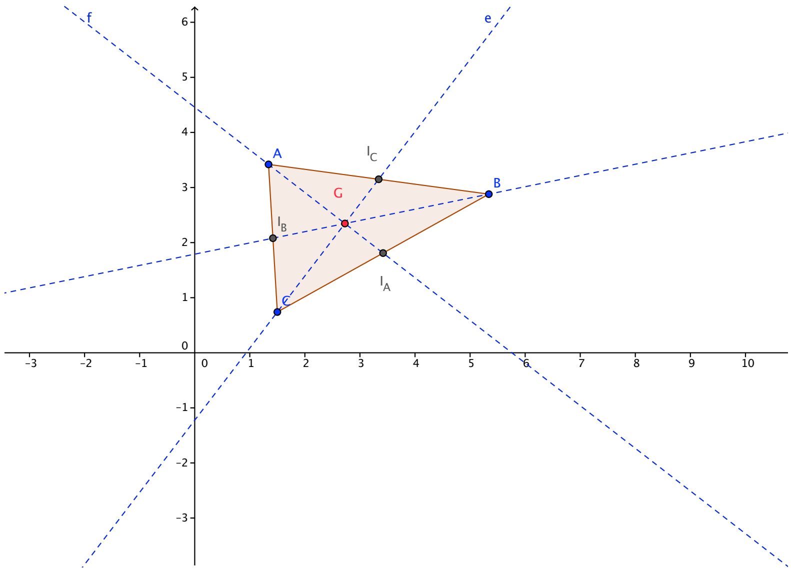
Rem : 1) la propriété d'associativité est fondamentale pour démontrer des propriétés géométriques, par exemple, la concourrence de droites dans le triangle ...
Considérons G isobarycentre des points A, B, C, trois points du plan $\mathbb{R}^2$ affine. Donc $G=Bar((A,1),(B,1),(C,1))$. La propriété d'associativité nous dit :

$$G=Bar((A,1),(I_A,2))=Bar((B,1),(I_B,2))=Bar((C,1),(I_C,2))$$

si

$$I_A=Bar((B,1),(C,1)),\quad I_B=Bar((C,1),(A,1)),\quad I_C=Bar((A,1),(B,1)),$$

autrement dit le point I_A (resp. I_B, I_C) est le milieu du segment $[BC]$ (respectivement $[CA]$, $[AB]$). Donc $G\in(AI_A)\cap(BI_B)\cap(CI_C)$, il est donc le point de concours des médianes du triangle. Ce qui démontre au passage que les trois médianes du triangle sont concourrantes.



2) Le problème due à l'homogénéité peut-être fixé en imposant que la somme des coefficients fait 1 mais cela peut s'avérer une contrainte délicate ...

Proposition 4.4. *Soient $(A_0, A_1, A_1, \ldots, A_m)$ $m+1$ points de $\mathcal{E}$. Il y a équivalence entre*

1. *Pour tout j, la famille $(\overrightarrow{A_jA_i})_{i\neq j}$ est libre dans $\vec{E}$,*
2. *Pour tout j $A_j \notin Aff(\{A_i, i \neq j\})$,*
3. *Il existe un j pour lequel la famille $(\overrightarrow{A_jA_i})_{i\neq j}$ est libre dans $\vec{E}$,*

Définition 4.8. *Repère affine et système de coordonnées barycentriques . Une famille affinement libre $(A_i, \lambda_i)_i$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ espace affine si et seulement si la famille $B_j = (\overrightarrow{A_jA_i})_i$ est une base de $\vec{E}$.*

Rem : il faut donc $n+1$ points dans un espace affine de dimension n pour constituer un repère affine. Alors tout point M de $\mathcal{E}$ s'écrit, de manière unique, comme barycentre des points (A_i, λ_i) avec $\sum_i \lambda_i = 1$ et les scalaires (λ_i) s'appellent système de coordonnées barycentriques de M.

Exemples : Dans le plan affine, 3 points non alignés A, B, C constituent un repère affine du plan. On peut écrire tout point M du plan comme barycentres des points pondérés $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.

Les points pour lesquels $\alpha = 0$ sont les points de la droite (BC) (Pourquoi ?), $\beta = 0$ ceux de (CA) etc .... On verra en TD que les poids (α, β, γ) peuvent s'obtenir via des déterminants.

4.3 Les objets géométriques du plan affine

Trois types d'objets nous intéressent principalement dans le plan : les droites (qui en sont des sous-espaces affines), les triangles et les cercles. Il y en a bien sûr d'autres à savoir les polygones ; les cercles sont des objets euclidiens alors que Triangles et droites sont des objets a priori affines mais leurs propriétés euclidiennes sont intéressantes (orthogonal, distance à la droite, médiatrices, trigonométrie, angles ...) . De même certains notions comme le parallèlisme sont affines tandis que que tout ce qui concerne les mesures(Aire, périmètre , etc) les distances (bissectrices) ou l'orthogonalité (médiatrice) sont euclidiennes.

4.3.1 Pythagore affine

Un des objets phares du plan affine de $\mathbb{R}^2$, c'est le triangle :

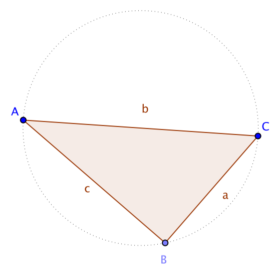
Définition 4.9. *Etant donnés trois points du plan, A, B, C, on appelle triangle la réunion des trois segments $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$. Lorsque les trois points sont non alignés, le triangle est dit non aplati.*

Du fait de la structure d'espace affine de $\mathbb{R}^2$ et des propriétés que l'on a vu pour $\mathbb{R}^2$ euclidien on a

Proposition 4.5. Pythagore affine *Les trois points non alignés A, B, C forment un triangle rectangle en B du plan si et seulement si*

$$||\overrightarrow{BA}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2 = ||\overrightarrow{AC}||^2 \tag{4.3}$$

Preuve : : c'est clair puisque (4.3) équivaut à l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$



4.3.2 Droites

On sait que :

Définition 4.10. *On appelle droite du plan passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ l'ensemble des points M du plan tel que la famille $(\vec{AM}, \vec{u})$ soit liée . On note cette ensemble $D(A, \vec{u})$*

Proposition 4.6. *$D(A, \vec{u})$ est un espace affine de dimension 1 de direction $\vec{D} = Vec(\vec{u})$ donc un sous-espace affine du plan affine. En particulier $D(A, \vec{u}) = D(B, \vec{u})$ pour tout point $B \in D(A, \vec{u})$.*

Preuve : : c'est assez clair puisque à tout couple de points $(P, Q) \in D(A, \vec{u})$ on peut associer le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ (par la définition dans le plan) et $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}$ (par Chasles dans dans le plan) donc $\overrightarrow{PQ} \in Vec(\vec{u})$ et Chasles et autres propriétées sont vraies puisque vraies dans le plan. $\square$

Proposition 4.7. *Par deux points A et B non confondus du plan passe une unique droite : la droite $D(A, \overrightarrow{AB})$*

4.3.3 Equations de droites

Commençons par donner un système d'équations paramétriques d'une droite (AB) avec $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$.
Un point $M(x, y) \in (AB)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont liés autrement dit si et seulement si il existe un réel t de sorte que $x = x_A + t(x_B - x_A)$ et $y = y_A + t(y_B - y_A)$. Le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + t(x_B - x_A) \\ y & = & y_A + t(y_B - y_A) \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R},$$

s'appelle un système d'équations paramétriques de la droite (AB).
Poursuivons en donnant une équation cartésienne de la droite (AB).
Un point $M(x, y) \in (AB)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont liés ce qui s'exprime à l'aide du déterminant

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$$

soit encore par propriété du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & x_B & x_A \\ y & y_B & y_A \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de sorte qu'en développant suivant la première colonne, on obtient comme équation cartésienne de (AB)

$$x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + (x_B y_A - x_A y_B) = 0$$

Proposition 4.8. *L'ensemble des points $M(x, y)$ satisfaisant une équation de la forme $ax+by+c = 0$ (avec $a^2+b^2 \neq 0$) est une droite affine de direction $Vec(-b, a)$.*

4.3.4 Parallélisme

Définition 4.11. et Proposition
Deux droites D et D' sont dites parallèles si elles ont même direction ie $\vec{D} = \vec{D}'$.

Proposition 4.9. *La relation $D//D'$ est une relation d'équivalence.*

4.3.5 Orthogonalité

Définition 4.12. *Deux droites $\mathcal{D}$ de direction $\vec{D} = Vec(\vec{u})$ et $\mathcal{D}'$ de direction $\vec{D}' = Vec(\vec{u}')$ sont dites orthogonales si leur direction le sont ie si $\vec{u}.\vec{u}' = 0$.*

On a aussi :

Proposition 4.10. *Etant donné un vecteur $\vec{u} = (a, b)$, non nul, alors l'ensemble $\{M(x, y) \in R^2 / \vec{u}.\overrightarrow{AM} = \vec{0}\}$ est une droite $\mathcal{D}$ affine passant par A et de direction $\vec{D} = Vec(\vec{v})$ avec $\vec{v} = (-b, a)$.*

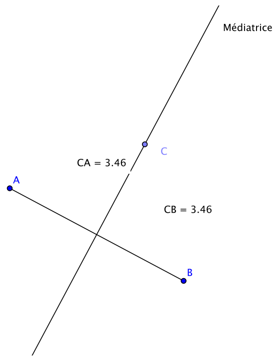
Une droite classique

Proposition 4.11. Médiatrice d'un segment
L'ensemble des points M équidistants de deux points A et B, non confondus, du plan est une droite appelée médiatrice du segment $[AB]$ qui passe par le milieu du segment et qui lui est orthogonale.

Preuve : : On introduit I milieu du segment $[AB]$, et on développecomme dans la preuve de Pythagore, grâce à Chasles $||\overrightarrow{MA}||^2 = ||\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}||^2 = ||\overrightarrow{MI}||^2 + 2\langle\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IA}\rangle + ||\overrightarrow{IA}||^2$; on fait de même pour $||\overrightarrow{MB}||^2 = ||\overrightarrow{MI}||^2 + 2\langle\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IB}\rangle + ||\overrightarrow{IB}||^2$ ce qui donne

$$\langle\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IA}\rangle = \langle\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IB}\rangle, \quad \text{ou encore} \quad \langle\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{AB}\rangle = \vec{0}$$

et en vertu de la proposition précédente ceci est une droite passant par I et perpendiculaire à (AB). □



4.3.6 Position relative de droites

Ce sont des propriétés a priori affines.....

Proposition 4.12. *Deux droites du plan sont concourantes ou parallèles. En particulier du droites non parallèles ont un unique point commun et deux droites sont confondues si et seulement si elles sont parrallèles et ont un point commun.*

Preuve : : D'après la prosition vue plus haut , on sait que l'intersection des deux droites est soit vide soit un sous-espace affine .
On se donne un repère du plan et deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes dans ce repère respectives $ux+vy+h=0$, $u'x+v'y+h'=0$; un point $M(x,y)$ appartient à l'intersection $D \cap D'$ si et seulement si ses composantes (x,y) dans le repère donné vérifient le système linéaire formé par les deux équations ie :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} ux+vy+h & = & 0 \\ u'x+v'y+h' & = & 0 \end{array}\right.$$

On sait que ce système est de Cramer si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0$$

ce qui dit que le système homogène n'a que le vecteur nul comme solution donc d'après l'étude vectoirielle cela signifie que $\vec{D} \cap \vec{D}' = \{\vec{0}\}$ et les deux vecteurs directeurs des droites D et D' forment une famille libre. Donc dans

ce cas-là on a un point unique M dont les composantes sont données par les formules de Cramer et sinon les deux vecteurs directeurs sont liés ce qui donne $\vec{D} = \vec{D}'$ et les deux droites sont donc parallèles.
On obtient alors comme intersection :
-$D \cap D = D = D'$ les droites sont confondues car (S) se ramène à une équation $ux + vy + h = 0$ la deuxième étant proportionnalle à la prmeière.
-$D \cap D = \emptyset$ les droites sont strictement parallèles et le système (S) est alors dit incompatible. □

On peut aussi s'intéresser à ce qui se passe avec 3 droites

Exercice 5. *Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ les droites d'équations respectives $ux+vy+h = 0$, $u'x+v'y+h' = 0$ et $u''x+v''y+h'' = 0$. Démontrer que les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} u & v & h \\ u' & v' & h' \\ u'' & v'' & h'' \end{vmatrix} = 0.$$

On a vu qu'une famille formée de deux vecteurs orthogonaux est toujours libre donc cela donne comme conséquence affine :

Proposition 4.13. *Deux droites du plan qui sont perpendiculaires sont toujours concourantes.*

et bien sûr :

Proposition 4.14. *1) SI $\Delta \perp D$, alors $\Delta \perp D'$ pour toute droite D' parallèle à D.*
2) Les perpendiculaires respectives à deux droites sécantes sont sécantes.

Preuve : : 1) $\Delta \perp D$ si et seulement si la direction $\vec{\Delta}$ est orthogonale à $\vec{D}$ et toute droite D' parallèle à D à même direction !
2) D'après l'étude des problèmes d'intersection vue plus haut, $D \cap D' = \{M\}$ si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0$$

ce qui dit précisément que les vecteurs normaux à D et D', $\vec{N} = (u, v)$ et $N'(u', v')$, forment une famille libre donc les droites Δ de driection $\vec{N}$ et Δ' de direction $\vec{N}'$ sont sécantes d'après l'étude vue plus haut. □

4.3.7 Distance d'un point à une droite

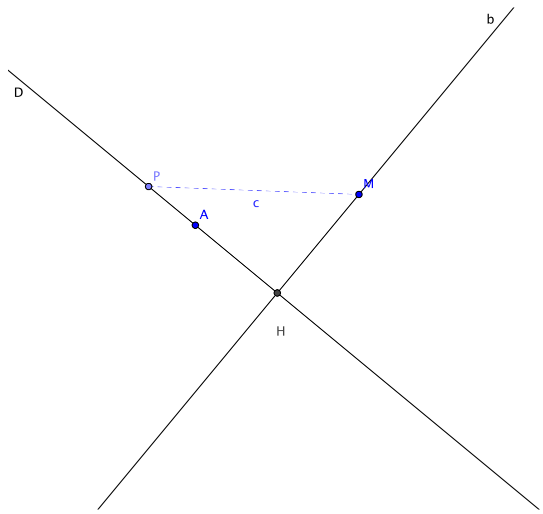
Proposition 4.15. *Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$ et M un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, alors il existe un unique point $H \in \mathcal{D}$ de sorte que $\overrightarrow{MH} \perp \mathcal{D}$.*
2) H est l'unique point réalisant le minimum des distances MP quand le point P parcours la droite

Preuve : : Si on note $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ un vecteur qui lui est orthogonal, d'après la proposition précédente la droite $\mathcal{D}(M, \vec{v})$ et la droite $\mathcal{D}$ se coupent en un unique point H. Mais d'après Pythagore dans le triangle MHP :

$$MH^2 + HP^2 = MP^2 \quad \forall P \in \mathcal{D}$$

donc $MP^2 \geq MH^2$ ce qui établit le résultat . □

Définition 4.13. *L'unique point $H \in \mathcal{D}$ de sorte que $\overrightarrow{MH} \perp \mathcal{D}$ est appelé projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.*
La longueur HP s'appelle la distance du point M à $\mathcal{D}$ et est notée $d(M, \mathcal{D})$.



Exercice Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$ déterminer la distance $d(M, \mathcal{D})$ en fonction des coordonnées $M(x_0, y_0)$ du plan affine euclidien.

4.3.8 Triangles

Définition 4.14. *Etant donnés trois points du plan, A, B, C, on appelle triangle la réunion des trois segments $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$. Lorsque les trois points sont non alignés, le triangle est dit non aplati.*

Une notion affine : les médianes

Définition 4.15. *Les droites* $D_A = (AI_A)$, $D_B = (BI_B)$, $D_C = (CI_C)$ *qui joignent les sommets du triangle au milieu des cotés opposés sont appelées médiane du triangle.*

Proposition 4.16. *Les trois médianes d'un triangle sont concourrantes.*

Preuve : : proposition déjà vue

Dans le triangle on peut définir des objets " euclidiens" , les médiatrices et les hauteurs. Petit rappel : les médiatrices du triangle sont celles des segment $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. On verra ci-après (cercle circonscrit)

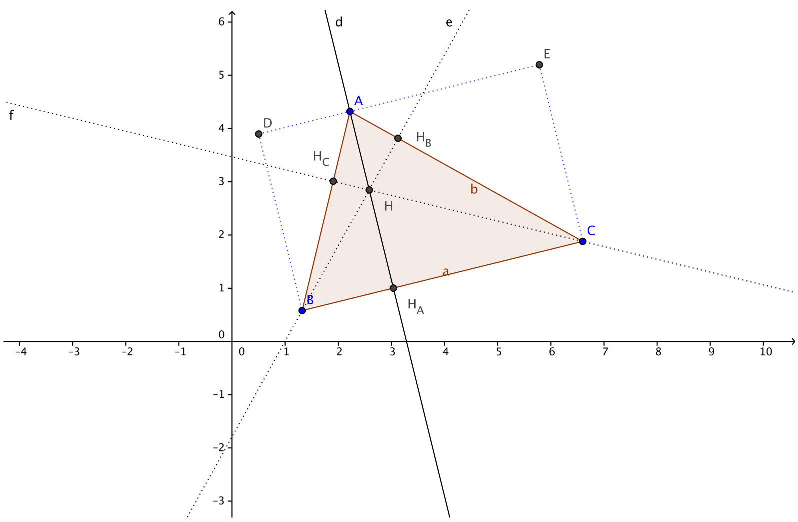
Proposition 4.17. *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

mais on peut aussi le faire avec la méthode analytique rappelée ci-dessus tout comme le résultat analogue avec les hauteurs d'un triangle.

Définition 4.16. *Les droites* $\Delta_A = (AH_A)$, $\Delta_B = (BH_B)$, $\Delta_C = (CH_C)$ *qui joignent les sommets du triangle à leur projection sur le coté opposé sont appelées hauteurs du triangle respectivement issue de* A, *de* B *et de* C.

Proposition 4.18. *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Preuve : : Excellent exercice que l'on peut traiter par exemple en choisissant un repère orthonormé et en écrivant les équations .... ou en cherchant les coordonnées barycentriques du point H, *appelé orthocentre*, intersection des trois hauteurs...



Proposition 4.19. *L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC est égale au produit de la longueur d'un coté quelconque multiplié par la moitié de la longueur de la hauteur issue du sommet opposé . Soit en terme de déterminant :*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})| = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})|.$$

Preuve : : On connait la propriété de l'aire ($2\mathcal{A}$ est l'aire d'un rectangle dont un coté est $[BC]$ et l'autre a pour longueur celle de AH_A , ie le rectangle BDEC de la figure).
La propriété via les déterminants est due d'une part à la relation de Chasles $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH_A} + \overrightarrow{H_AA}$, d'autre part à la propriété de linéarité du déterminant

$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH_A}+\overrightarrow{H_AA}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH_A})+\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{H_AA}) = \pm BC.AH_A$$

puisque le vecteur $\overrightarrow{BH_A}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. □

Définition 4.17. *On dira que le triangle non aplati ABC est direct si* $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$. *On le dira indirect dans le cas contraire.*

4.3.9 Cercles

Définition 4.18. *On appelle cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R l'ensemble $\mathcal{C}(\Omega, R)$ des points M du plan tels que la distance ΩM égale à R.*

Proposition 4.20. *Si $\Omega(a, b)$ dans un repère donné $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation cartésienne de $\mathcal{C}(\Omega, R)$ est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = R^2 - (a^2 + b^2)$.*
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est soit vide soit un cercle de centre $\Omega(a, b)$.

Preuve : En effet $x^2+y^2-2ax-2by = (x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2)$ on a donc clairement le sens direct et Si $M(x, y)$ satisfait $x^2+y^2-2ax-2by+c = 0$ soit encore $(x-a)^2+(y-b)^2 = (a^2+b^2)-c$; il n'y pas de solution si $c > (a^2+b^2)$ et sinon c'est un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $R = \sqrt{(a^2 + b^2) - c}$. □

Proposition 4.21. *Par trois points non alignés A,B et C passe un unique cercle appelé cercle circonscrit au triangle ABC.*

Preuve : : deux preuves la géométrique et l'analytique , elles ont toutes les deux un intérêt différent, la géométrique donne une construction, l'analytique une façon de trouver les coordonnées du centre du cercle à l'aide de celles des points A, B et C.

La géométrique fait intervenir un raisonnement par analyse-synthèse et les médiatrices . En effet si un tel cercle existe son centre Ω est équidistant des trois points A, B et C . Il est donc sur la médiatrice de $[AB]$ et de $[BC]$ qui sont sécantes puisque perpendiculaires à deux droites sécantes (AB) et (BC) les 3 points A, B et C étant non alignés. Mais comme $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ le point Ω est donc aussi sur la médiatrice de $[CA]$. Et le cercle est nécessairement $\mathcal{C}(\Omega, \Omega A)$.
Réciproquement ce cercle convient bien .
La preuve analytique repose sur la résolution d'un système linéaire : en effet on cherche trois inconnues a, b et c de sorte que les points $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et $C(x_3, y_3)$ satisfassent l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$; cela conduit au système de déterminant

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -1 \\ 2x_2 & 2y_2 & -1 \\ 2x_3 & 2y_3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times (-1) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

qui est non nul puisque A, B et C sont non alignés ; via les formules de Cramer on a tout de suite les coordonnées de l'unique point $\Omega(a, b)$ et le rayon. en calculant comme plus haut $R = \sqrt{(a^2 + b^2) - c}$.

Proposition 4.22. *L'ensemble Γ des points M tels que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MB}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.*

Preuve : si I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}).(\overrightarrow{MI} + \vec{IB}) = MI^2 - IA^2$ donc M est sur Γ si et seulement si il est sur le cercle de diamètre $[AB]$. □

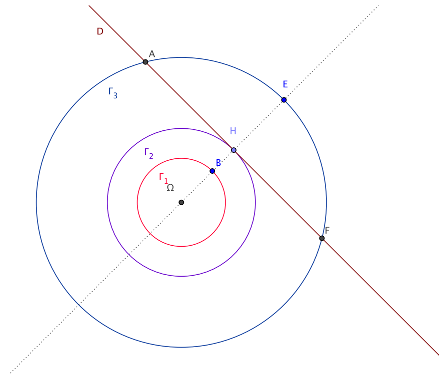
4.3.10 Position relative d'un cercle et d'une droite

On s'intéresse à l'intersection d'un cercle et d'une droite.

Proposition 4.23. *Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ une droite et $\mathcal{C}(\Omega, R)$ un cercle du plan. Alors leur intersection est formée de zéro, un ou deux points . Plus précisément si on note $d = d(\Omega, \mathcal{D})$, on a*

* *Si $d > R$, l'intersection est vide*
* *Si $d < R$ $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{P, Q\}$*
* *Si $d = R$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{T\}$ et le droite est dite tangente au cercle.*

Preuve : : Heuristiquement , en notant $\vec{u} = (\alpha, \beta)$, $M(x, y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ de sorte que d'une part $(x, y) = (x_A + t\alpha, y_A + t\beta)$ et que d'autre part (x, y) vérifie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = R^2 - (a^2 + b^2)$. On sera donc ramené à la résolution en t d'une équation du second degré dont il est bien connu qu'elle possède zéro , une ou deux solutions.



Pour être plus précis, on peut choisir comme origine du repère le centre Ω du cercle (avantage de l'affine). Si on note H la projection de Ω sur la droite $\mathcal{D}$, pour tout point M de $\mathcal{D}$, le théorème de Pythagore dit que $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2$; donc si M appartient aussi au cercle centré en Ω et de rayon R, on a

$$R^2 - d^2 = HM^2$$

et on a donc les trois cas évoqués dans l'énoncé du théorème. $\square$

4.3.11 Equation de la tangente à un point d'un cercle

D'après l'étude précédente la tangente T en un point d'un cercle M du cercle $\Gamma = \mathcal{C}(\Omega(a,b), R)$ et la droite passant par $M(x_0, y_0)$ et orthogonale au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$, ce qui donne pour équation cartésienne :

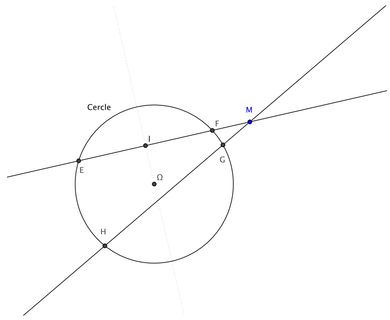
$$\mathcal{T} \qquad : (a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$$

Remarque : Une autre façon de voir les choses , si $\overrightarrow{\Omega M} = R(\cos(\theta), \sin(\theta))$ alors la tangente est la droite passant par M et dirigée par $\vec{v} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

4.3.12 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Proposition 4.24. *Etant donné un cercle $\Gamma = \mathcal{C}(\Omega(a,b), R)$ et un point M du plan affine euclidien, et si deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passent par M et rencontrent le cercle Γ en deux points E et F (resp G et H) alors on a*

$$\overline{MF}\ \overline{ME} = \overline{MG}\ \overline{MH} = \Omega M^2 - R^2$$



Preuve : On a $\overline{MF}\ \overline{ME} = \overrightarrow{MF}.\overrightarrow{ME}$. Appelons I la projection de Ω sur la droite $(ME) = (MF)$. Comme le triangle $E\Omega F$ est isocèle en Ω (Ω est le centre du cercle ...), hauteur et médiane issue de Ω sont confondues avec la médiatrice de $[EF]$ donc I est le milieu de $[EF]$ mais alors, grâce à deux applications du théorème de Pythagore :

$$\overline{MF}\ \overline{ME} = (\overrightarrow{MI}+\vec{IF}).(\overrightarrow{MI}-\vec{IF}) = MI^2-IF^2 = \Omega M^2-I\Omega^2-(R^2-\Omega^2) = \Omega M^2-R^2$$

Définition 4.19. *Le réel $\Gamma(M) = \Omega M^2 - R^2$ s'appelle la puissance du point M par rapport au cercle Γ. Il est nul si et seulement si le point M est sur Γ*

On a bien sûr (avec les notations usuelles) $\Gamma(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2) - R^2$

Proposition 4.25. *Soient A, B, A', B' quatre points distincts du plan pour lesquels les droites (Ab) et $(A'B')$ sont sécantes en un point P. Pour que les quatre points sont cocycliques (sur un même cercle) si et seulement si*

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA'}.\overrightarrow{PB'} \tag{4.4}$$

Preuve : On vient de voir que cette condition est nécessaire puisque si A, B, A', B' sont sur un cercle Γ, le réel $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \Gamma(P)$ est la puissance de P parrapport à Γ.
Réciproquement si on a la propriété ci-dessus, les trois points A, B, A' n'étant pas alignés on peut trouver un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et A' . La droite PA' recoupe le cercle en un point B" et on sait d'après ce qui précède que

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA'}.\overrightarrow{PB''}$$

Comme P, A', B' et B" sont alignés cela dit que $\overrightarrow{PB''} = \overrightarrow{PB'}$ et donc $B" = B'$ et donc A, B, A', B' sont cocycliques. □

4.3.13 Angle, triangle et cocyclicité

On se donne un triangle ABC non aplati (ie A, B, C sont non alignés) , les segments $[A, B], [B, C], [C, A]$ sont les cotés du triangles de longueur respectives c, a, b.

Proposition 4.26. *Soit un triangle ABC non aplati et $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les mesures des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}), (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}), (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ qui appartiennent à $]-\pi, \pi[$. Alors $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sont du même signe et*

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pm\pi.$$

Remarque : Lorsque le signe est $+$, on dit que le triangle ABC est direct, et qu'il est indirect sinon.
Preuve : On écrit la relation de Chasles pour les angles :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$$

Mais si R est la rotation telle que $R(\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{a}\overrightarrow{BC}$ on a aussi $R(\frac{1}{b}\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{a}\overrightarrow{CB}$ par linéarité de R.
donc

$$(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}),$$

soit

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = mes((\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}})) \equiv \pi[2\pi].$$

Comme chaque mesure $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ appartient à $]-\pi, \pi[$,

$$|\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}| < 3\pi.$$

Ce qui donne

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pm\pi.$$

On prend B comme origine et on prend le repère orthonormé $\mathcal{R} = (B, \vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BC}||}, \vec{\jmath})$, on a

$$R_{\hat{B}}(\frac{\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BC}||}) = \frac{\overrightarrow{BA}}{||\overrightarrow{B}A||}$$

donc $\overrightarrow{BA} = c(\cos\hat{B}, \sin\hat{B})$.
De même la rotation $R_{-\widehat{C}}$ d'angle de vecteur orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ transforme le vecteur unitaire $-\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{CB}}{||\overrightarrow{CB}||}$ en le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{CA}}{||\overrightarrow{CA}||}$ donc le vecteur

$\overrightarrow{CA}$ a pour composantes $(-b\cos(-\widehat{C}), -b\sin(-\widehat{C})) = (-b\cos\widehat{C}, b\sin\widehat{C})$ ce qui donne en regardant l'ordonnée de A dans le repère $\mathcal{R}$:

$$c\sin\widehat{B} = b\sin\widehat{C},$$

donc $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ont le même signe. On démontre de même que

$$a\sin\widehat{C} = c\sin\widehat{A},$$

$\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ ont le même signe. Ce qui établit le résultat souhaité . □

4.3.14 Relations métriques dans le triangle

On reprend les notations vues plus haut . On peut prolonger les relations vues plus haut :

Exercice 11. 1) Démontrer la relation

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}\,.$$

2) a) On désigne par A' le milieu de BC. Démontrer la relation

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AA'^2 + \frac{1}{2}\,BC^2\,.$$

b) Soit k un nombre réel ; déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

3)On sait que le triangle ABC soit rectangle en A, c'est-à-dire que $AB.AC = 0$, il faut et il suffit que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Démontrer qu'une condition équivalente est $2\,AA' = BC$. Préciser l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$.

4) a) Démontrer la relation

$$AC^2 - AB^2 = 2\,AA'.BC\ .$$

b) Soit k un nombre réel ; déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MC^2 - MB^2 = k$.

5) a) On suppose que le triangle ABC est direct, et on note S sa surface. Démontrer la relation

$$2\,S = ab\sin\widehat{C}\,.$$

b) En déduire les égalités

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\,S}\,.$$

6) On pose $2\,p = a + b + c$. Démontrer la relation

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \quad \textit{(formule de Héron}^1\textit{)}.$$

[1] HÉRON D'ALEXANDRIE, dit Héron l'ancien, I-er ou II-ème siècle av. J.C.]

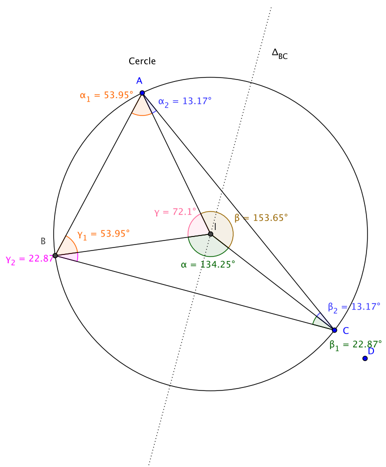
4.3.15 Cocyclicité

Quelques propriétés fondamentales

Proposition 4.27. angle au centre
Etant donnés trois points non alignés A, B et C. Si I désigne le centre de l'unique cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C, on a :

$$(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[2\pi].$$

Preuve :



On pose

$$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}), \quad \beta = (\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}}), \quad \gamma = (\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$$

On a bien sûr : $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0[2\pi]$.
Le triangle $IAB(IAC)$ est isocèle en I donc on a les égalités suivantes entre angles

$$\alpha_1 = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = (\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}}) = \gamma_1 \quad \alpha_2 = (\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}}) = \beta_2$$

et bien sûr $\alpha_1 + \alpha_2 = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ par la relation de Chasles angulaire.
En écrivant la relation angulaire dans les triangles, AIB et AIC , on a

$$\gamma + 2\alpha_1 \equiv \pi[2\pi], \quad \beta + 2\alpha_2 \equiv \pi[2\pi]$$

et si on additionne les deux égalités et qu'on utilise la relation avec α, β et γ, on obtient

$$2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \alpha[2\pi].$$

□

On admet les résultats qui se démontrent à l'aide de la proposition précédente

Proposition 4.28. *Etant donnés deux points distincts B et C du plan et un nombre réel α , l'ensemble des points M distincts de B et C tel que $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) \equiv \alpha[\pi]$ est :*
-soit la droite (BC) privée des points B et C,
-soit un cercle passant par B et C, privé de B et C.

Proposition 4.29. *Pour que 4 points A, B, C et D du plan soient alignés ou cocycliques , il faut et il suffit que*

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}})[\pi]$$

Remarque : on a vu le cas où $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}$ qui correspond au cercle de diamètre BC.

4.4 Exercices sur le chapitre 4, partie géométrie plane

Exercice 12. 1) Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ les droites d'équations respectives $ux + vy + h = 0$, $u'x + v'y + h' = 0$ et $u''x + v''y + h'' = 0$. Démontrer que les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} u & v & h \\ u' & v' & h' \\ u'' & v'' & h'' \end{vmatrix} = 0.$$

2) discuter en fonction que paramètre réel m , les positions relatives des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ les droites d'équations respectives

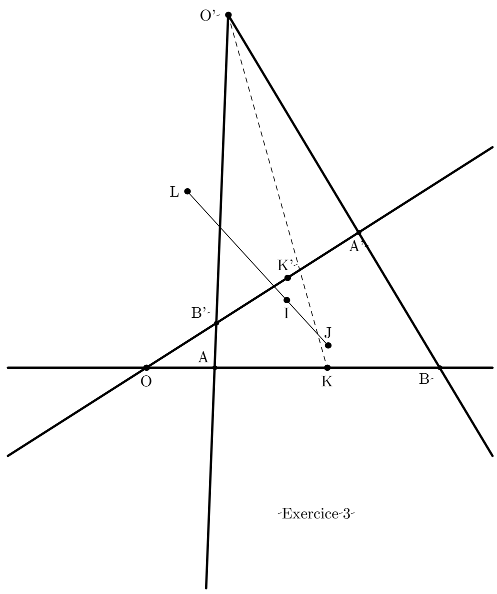
$mx + y = 1, x + my = 1, x + y = m.$

Exercice 13. 1) Dans le plan rapporté à un repère , écrire l'équation de la droite joignant les points $A = (0, a)$ et $B = (b, 0)$.
2) On considére les points $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$ et $C = (c, 0)$.

a) Déterminer les coordonnées des milieux A', B' et C' milieus respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Ecrire les équations des droites (AA'), (BB') et (CC') ; démontrer qu'elles sont concourantes et déterminer les coordonnées de leur point commun.

b) Même question pour les hauteurs du triangle ABC.

Exercice 14. Dans le plan affine, on considére deux droites D_1 et D_2 sécantes en O et deux autres droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en O'. On désigne par A, B, A' et B' les points comme sur la figure . On considère le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ et on désigne par b et b' les réels, distincts de 1, tels que $B = (b, 0)$ et $B' = (0, b')$.
1) Déterminer une équation cartésienne des droites (AB') et $(A'B)$. En déduire les coordonnées du point O' .
2) Démontrer que les milieux des segments $[A, A']$, $[B, B']$ et $[O, O']$ sont alignés.
3) On désigne par K le milieu de $[A, B]$ et K' le milieu de $[A', B']$. A quelle condition portant sur b et b' a-t-on concourrance des droites (AB'), $(A'B)$ et (KK') ? Qu'en déduit-on ?



-Exercice-3-

Exercice 15. Soit $\mathcal{D}$ la droite affine de $\mathbb{R}^2$ dont une équation est $ux+vy+h=0$. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale du point M de coordonnées (x_0, y_0) ; en déduire que la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est égale à :
$\dfrac{|ux_0 + vy_0 + h|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Exercice 16. Soient $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) la droite passant par $A = (1,1)$ et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ (respectivement $\vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$).
1) Etablir qu'une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ est $\beta_1 x - \alpha_1 y = \beta_1 - \alpha_1$ et donner une équation de $\mathcal{D}_2$.
2) a) Montrer que les vecteurs $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ sont orthogonaux.
b) Etablir , grâce à l'exercice précédent, que l'ensemble des points M du plan qui sont à égale distance de la droite $\mathcal{D}_1$ et de la droite $\mathcal{D}_2$ est constitué de la réunion de deux droites Δ_1 et Δ_2, orthogonales de vecteur directeurs respectifs $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

Exercice 17. On se donne un triangle équilatéral ABC et un point M intérieur au triangle . Démontrer que la somme des distances de M aux trois cotés est indépendantes de M. On pourra choisir un repère orthonormé d'origine le milieu de $[AB]$ et utiliser les projections de M sur les trois cotés du triangle.

Exercice 18. Dans un plan euclidien, on se donne trois points A_1, A_2 et A_3 non alignés. Construire un triangle dont ces points sont les milieux des trois cotés.

Exercice 19. Rédiger l'exercice 11.