Chapitre 2

Intégrales

Usuellement la première « définition » de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ que l'on voit est la suivante : on considère F une primitive de f, *i.e.* une fonction telle que $F'(x) = f(x)$, et on pose

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Cette approche pose deux problèmes :

- tout d'abord une telle primitive existe-t'elle ?
- deuxièmement, même si on sait que la primitive existe, sait-on la calculer ?

Concernant la seconde question, c'est une problématique que l'on rencontre très vite. En effet on sait par exemple que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a une primitive qui s'écrit $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Mais pour déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, on est obligé d'introduire une nouvelle fonction, le logarithme, qui ne s'écrit pas en termes de fonctions plus simples. Toutefois, cela n'explique pas pourquoi une telle primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ existe.

Un autre exemple concernant cette deuxième question est la fonction $x \mapsto e^{x^2}$. On peut montrer (c'est hors de la portée de ce cours) qu'aucune primitive de cette fonction n'est « calculable » en termes de fonctions « élémentaires ».

Le chapitre ci-après va en fait répondre à la première question au moins pour les fonctions f continues et justifier ainsi l'existence de la fonction ln. De plus, nous considérerons uniquement le cas des fonctions à valeurs réelles ; le cas des fonctions à valeurs complexes se traite de façon similaire.

2.1 Uniforme continuité

On commence par donner quelques compléments sur les fonctions continues.

Définition 2.1.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur I. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\ . \tag{2.1}$$

Remarque. Rappelons que la définition de la continuité de f sur I est la suivante

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in I,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi le passage de la continuité à la continuité uniforme revient à intervertir les quantificateurs $\forall x \in I$ et $\exists \eta > 0$ (notons que l'on peut toujours intervertir $\forall x \in I$ et $\forall \varepsilon > 0$). Autrement dit, pour la continuité uniforme, on demande à ce que le η ne dépende pas du choix de x (c'est le caractère uniforme) ce qui est autorisé pour la simple continuité. Ainsi la continuité uniforme implique la continuité. L'implication réciproque n'est pas vraie en général (trouver un contre-exemple). Toutefois le résultat suivant donne un cas où cette seconde implication est vraie.

Théorème 2.1.2 (Théorème de Heine)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. f est alors uniformément continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. La preuve fonctionne par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Autrement dit la négation de (2.1) est vraie :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x, y \in [a, b],\ |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\ .$$

Ainsi pour $\eta = \frac{1}{n}$, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\bar{x} \in [a, b]$. On a aussi $|y_{\varphi(n)} - \bar{x}| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - \bar{x}| \leq \frac{1}{n} + |x_{\varphi(n)} - \bar{x}| \to 0$: $(y_{\varphi(n)})_n$ converge vers $\bar{x}$.

Comme f est continue, $(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}))_n$ converge vers $f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0$. Mais ceci contredit $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$. Le théorème est donc prouvé. □

Afin d'exploiter la notion d'uniforme continuité d'une fonction continue f, nous introduisons une quantité appelée module de continuité de f.

Définition 2.1.3. Soit $f \in C^0([a, b])$, on définit son module de continuité pour $\eta \geq 0$ par

$$\omega(\eta) = \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in [a, b] \text{ et } |x - y| \leq \eta\}$$

$\omega(\eta)$ mesure de combien la fonction f oscille sur un intervalle de longueur η. Comme f est uniformément continue, on a $\lim_{\eta \to 0} \omega(\eta) = 0$.

2.2 Intégration des fonctions continues

Dans toute cette partie I sera un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.2.1 Subdivisions et définitions

Commençons par définir la notion de subdivision.

Définition 2.2.1. Soit $a, b \in I$ avec $a \leq b$. Une subdivision (parfois appelée n-subdivision) du segment $[a, b]$ est un $(n+1)$-uplet $\sigma = (s_0, \ldots, s_n)$ tel que

$$a = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n = b$$

En fait à une subdivision σ, on peut associer un « découpage » du segment $[a, b]$ de la façon suivante

$$[a, b] = [s_0, s_1] \cup \cdots \cup [s_{n-1}, s_n]$$

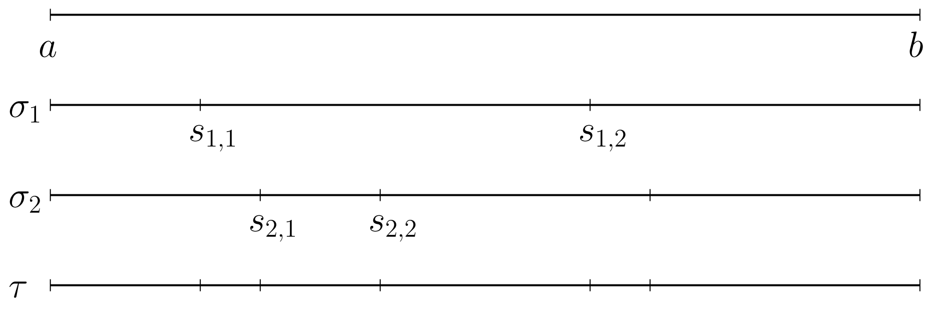
où l'intersection de deux segments consécutifs $[s_{k-1}, s_k]$, $[s_k, s_{k+1}]$ se réduit au singleton $\{s_k\}$.

Définition 2.2.2. Soit $\sigma = (s_0, \ldots, s_n)$ et $\sigma' = (s'_0, \ldots, s'_{n'})$ deux subdivisions du segment $[a, b]$. On dit que σ' est plus fine que σ ou une sous-subdivision de σ si, pour $k \in \{0, \cdots, n\}$, s_k est un élément de σ'.

Cette définition dit que pour obtenir le découpage de $[a, b]$ associé à σ', on peut partir de celui associé à σ et redécouper chacun des segments $[s_k, s_{k+1}]$ ainsi définis pour obtenir les segments $[s'_j, s'_{j+1}]$.

Lemme 2.2.3. *Pour $i = 1, 2$, considérons $\sigma_i = (s_{i,0}, \ldots, s_{i,n_i})$ deux subdivisions de $[a, b]$. Il existe alors une subdivision $\tau = (t_0, \ldots, t_{n_0})$ de $[a, b]$ qui est plus fine que σ_1 et σ_2.*

Démonstration. On considère $T = \{s_{1,0}, \ldots, s_{1,n_1}\} \cup \{s_{2,0}, \ldots, s_{2,n_2}\}$. On forme alors un n_0-uplet τ en ordonnant T de façon croissante. Par construction, τ est plus fine que σ_1 et σ_2. □



Nous allons maintenant définir une classe de fonctions qui généralise celle des fonctions continues.

Définition 2.2.4. Soit $a, b \in I$ avec $a \leq b$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si il existe une subdivision $\sigma = (s_0, \ldots, s_n)$ de $[a, b]$ telle que

- f est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et

- f admet des limites à gauche et à droite en tous les s_k.

Une telle subdivision est dite adaptée à f. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est noté $C^0_{pm}([a,b])$.

Remarquons aussi que dans les définitions ci-dessus, on n'impose rien sur la valeur de f aux points s_k. Remarquons finalement qu'une subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à f est adaptée à f.

Proposition 2.2.5. $C^0_{pm}([a,b])$*est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}([a,b])$.

Démonstration. Tout d'abord, on remarque la fonction nulle est continue par morceaux.

Si f_1 et $f_2 \in C^0_{pm}([a,b])$, on considère des subdivisions σ_1 et σ_2 adaptées à f_1 et f_2. On considère alors $\tau = (t_0, \ldots, t_n)$ une subdivision plus fine que σ_1 et σ_2. τ est alors adaptée à f_1 et f_2. Ainsi f_1 et f_2 sont continues sur les intervalles $]t_k, t_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq n-1)$ et ont des limites à gauche et droite en les t_k $(0 \leq k \leq n)$.

Finalement si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_1 + \lambda f_2$ est continue sur les intervalles $]t_k, t_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq n-1)$ et a des limites à gauche et droite en les t_k $(0 \leq k \leq n)$. Donc $f_1 + \lambda f_2 \in C^0_{pm}([a,b])$. □

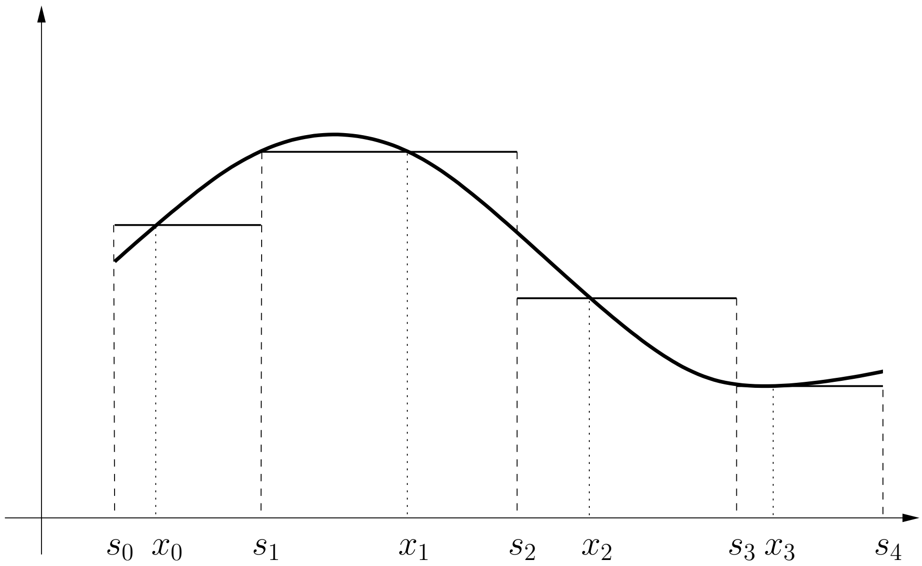
2.2.2 L'intégrale des fonctions continues par les sommes de Riemann

On dit souvent que l'intégrale d'une fonction f correspond à l'aire contenue sous le graphe de f (notons que cette notion d'aire n'est qu'intuitive pour l'instant). Afin de définir l'intégrale de f on va rendre précis cette idée en approchant cette aire par celle de rectangles.

Fixons donc une subdivision $\sigma = (s_0, \cdots, s_n)$ du segment $[a,b]$. Le n-uplet $X = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ de $[a,b]$ est dit adapté à σ si $x_i \in [s_i, s_{i+1}]$. Si $f \in C^0([a,b])$, on définit alors la somme de Riemann de f associée à σ et X par

$$S_{\sigma,X}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) f(x_i)$$

Ce nombre est en fait la somme des aires des rectangles de base $[s_i, s_{i+1}]$ et de hauteur $f(x_i)$ qui est une approximation de l'aire sous le graphe f : le dessin ci-dessous représente le graphe de f et les différents rectangles, il permet aussi de comparer les deux aires.



L'idée de la construction qui va suivre est qu'en prenant des subdivisions de plus en plus fines on doit pouvoir approcher la notion intuitive d'aire sous le graphe de f. Introduisons tout d'abord la notion de pas d'une subdivision : le pas d'une subdivision σ est $\max\{s_{i+1} - s_i, 0 \leq i \leq n-1\}$. Le pas de σ est noté $P(\sigma)$. Il s'agit donc de l'écart maximal entre deux points consécutifs de σ.

On a un premier résultat

Lemme 2.2.6. *Soit $f \in C^0([a,b])$. On note ω son module de continuité. Soit $\sigma = (s_0, \ldots, s_n)$ et $\tau = (t_0, \ldots, t_m)$ deux subdivisions de $[a,b]$ telle que τ est plus fine que σ. On note alors*

- *$X = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ un n-uplet de $[a,b]$ adapté à σ*

- *$Y = (y_0, \ldots, y_{m-1})$ un m-uplet de $[a,b]$ adapté à τ*

On a alors

$$|S_{\sigma,X}(f) - S_{\tau,Y}(f)| \leq (b-a)\omega(P(\sigma))$$

Démonstration. Comme τ est plus fine que σ, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $i_k \in \{0, \ldots, m\}$ tel que $s_k = t_{i_k}$. Ainsi si $i_k \leq i < i_{k+1} - 1$, on a $y_i \in [t_i, t_{i+1}] \subset [s_k, s_{k+1}]$.