Chapitre 3

Intégrales impropres ou convergentes

Dans le chapitre précédent nous avons vu comment on pouvait définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Toutefois, il peut être intéressant de définir aussi l'intégrale d'une fonction sur un intervalle quelconque comme $[0, +\infty[$ ou bien $]0, 1[$.

En fait ces intervalles, qui ne sont pas des segments, sont de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux (on note $f \in C^0_{pm}(I)$) si, pour tout $a, b \in I$, la restriction de f au segment $[a, b]$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

On note qu'une fonction continue par morceaux sur un segment n'a qu'un nombre fini de discontinuité alors qu'un fonction continue par morceaux sur un intervalle qui n'est pas un segment peut en avoir une infinité.

Définition 3.1.2. Soit I un intervalle de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ et $f \in C^0_{pm}(I)$ une fonction. On dit alors que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si

- $\displaystyle\lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx$ existe lorsque $I = [a, b[$, cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\lim_{t\to a} \int_t^a f(x)dx$ existe lorsque $I =]a, b]$, cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ convergent où $c \in I$ lorsque $I =]a, b[$, on note alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

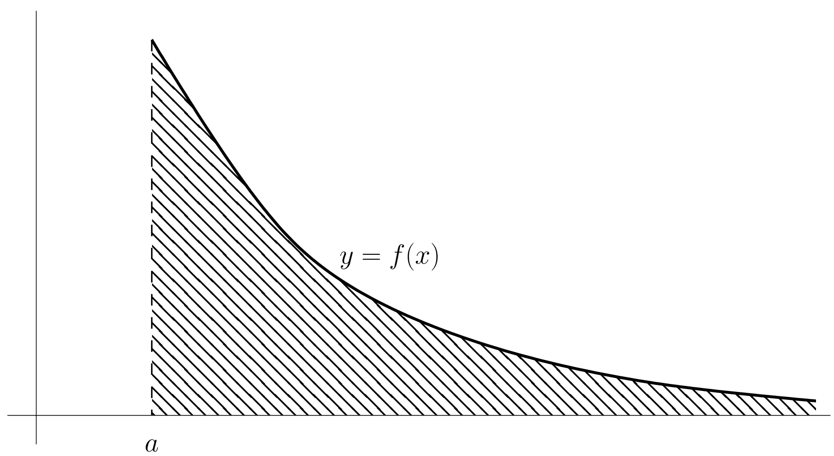
On constate que grâce à la relation de Chasles dans le troisième cas la définition ne dépend pas du choix de c.

Ainsi l'étude d'une intégrale impropre pose donc deux questions : la convergence (la limite existe-t-elle ou pas) et son calcul (quelle est la valeur de la limite). Ce cours se concentre principalement sur la première question.

Remarque. Si $f \in C^0_{pm}([a,+\infty[)$ et $b > a$, on a par la relation de Chasles $\int_a^t f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^t f(x)dx$. Comme $\int_a^b f(x)dx$ est une constante, on constate que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ est convergente. On dit que la convergence ne dépend que de la valeur de f proche de $+\infty$.

Dans la suite du cours nous allons quasi-exclusivement étudier le cas de $I = [a,+\infty[$. La plupart des résultats s'étendent de façon aisée aux autres cas.

Si le graphe d'une fonction f positive est représenté ci-dessous, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ signifie que l'aire de la zone hachurée est finie.



Exemple (Les intégrales de Riemann). Nous allons illustrer la définition par un exemple extrêmement important, celui des intégrales de Riemann : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$. Considérons donc $t \geq 1$ et $\alpha \neq 1$ et calculons

$$\int_a^t \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

Donc, pour $\alpha > 1$, l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{a^{\alpha-1}}$. Pour $\alpha < 1$ l'intégrale diverge. Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_a^t \frac{1}{x}dx = [\ln x]_a^t = \ln t - \ln a$$

Ainsi l'intégrale diverge.

On peut aussi étudier les intégrales de Riemann de la forme $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}dx$. On a pour $\alpha \neq 1$

$$\int_t^a \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_t^a = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)$$

Ainsi, pour $\alpha < 1$, l'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{a^{\alpha-1}}$. Pour $\alpha > 1$, l'intégrale diverge. Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_t^a \frac{1}{x}dx = [\ln x]_t^a = \ln a - \ln t$$

Ainsi l'intégrale diverge. On retiendra

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

Notons que ces conditions sur α traduise le fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ tend suffisamment vite vers 0 dans le premier cas et pas trop vite vers $+\infty$ dans le second.

Exemple. Étudions $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$. Pour cela regardons d'abord $\int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt$:

$$\int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x - 0 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. On peut faire de même sur $]-\infty, 0]$. Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt = \pi$$

Exemple. Étudions $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$ où $\lambda > 0$. On a $\int_0^t e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^t = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})$ qui converge vers $\frac{1}{\lambda}$ lorsque $t \to +\infty$. Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$.

Exemple. Étudions $\int_0^1 \ln x dx$, ici le problème se situe en 0. On a vu précédemment qu'une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$. Ainsi

$$\int_t^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_t^1 = -1 - t\ln t + t \xrightarrow[t\to 0]{} -1$$

et l'intégrale converge et $\int_0^1 \ln x dx = -1$.

Il faut parfois faire attention car la propriété de linéarité des intégrales ne s'étend pas directement aux intégrales impropres (comme pour la notion de limite). On a le résultat suivant.

Proposition 3.1.3. *Soit f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont convergentes. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty}(\lambda f + g)(t)dt$ est convergente et $\int_a^{+\infty}(\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)dt + \int_a^{+\infty} g(t)dt$*

Démonstration. Par linéarité de l'intégrale, on a $\int_a^x(\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt$. D'après les hypothèses, le terme de droite de l'égalité converge, donc celui de gauche aussi : l'intégrale est convergente. De plus par passage à la limite de l'égalité, on obtient la formule annoncée. □

Remarque. Notons que ce résultat peut aussi être utilisé pour démontrer que des intégrales sont divergentes. Si l'on sait que l'intégrale de f converge et celle de g diverge alors nécessairement celle de $f + g$ diverge. En effet si celle de $f + g$ convergeait, on pourrait écrire $g = (f + g) - f$ et montrer ainsi que l'intégrale de g serait convergente.

3.2 Intégrales impropres des fonctions positives

Dans cette partie nous introduisons des outils pour étudier la convergence d'intégrales impropres de fonctions positives.

Proposition 3.2.1. *Soit $f \in C^0_{pm}([a, +\infty[)$ une fonction positive. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq a$, $\int_a^x f(t)dt \leq M$. Alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.*

Démonstration. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Comme f est positive, F est croissante. Par hypothèse $F(x) \leq M$: F est majorée. Donc $\lim_{+\infty} F$ existe et est finie : l'intégrale converge. □

Proposition 3.2.2. *Soit f et g deux fonctions positives définies sur $[a, +\infty[$. On suppose que $f \leq g$ sur $[a, +\infty[$. On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge et*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

- *Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.*

Démonstration. Considérons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. On a $F(x) \leq G(x)$ et F et G sont des fonctions croissantes qui ont donc pour limite en $+\infty$ soit une limite finie soit $+\infty$.

Si l'intégrale de g est convergente, G admet une limite finie et par majoration F admet aussi une limite finie : l'intégrale de f est convergente. La première assertion est démontrée.

La seconde assertion est la contraposée de la première elle est donc aussi vraie. □

Exemple. Sur $[1,+\infty[$, on a $\frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2}$, comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (il s'agit d'une intégrale de Riemann), on obtient que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ est convergente et de même $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$. On le savait déjà par un calcul explicite effectué dans un exemple précédent.

Ainsi on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.3. *Soit f et g deux fonctions positives définies sur $[a,+\infty[$. On suppose que $f = O_{+\infty}(g)$. On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.*
- *Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.*

Exemple. Étudions la convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2-x}dx$. Tout d'abord, on a $1 \leq 2+\cos x \leq 3$; donc $\frac{2+\cos x}{x^2-x} = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2-x}) = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$. En tant qu'intégrale de Riemann, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge donc $\int_2^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2-x}dx$ converge.

Exemple. Étudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$. On sait par comparaison des fonctions polynômes et exponentielles que $e^{-x} = O_{+\infty}(\frac{1}{x^3})$. Ainsi $xe^{-x} = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$ et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ converge par comparaison avec une intégrale de Riemann. On aurait pu aussi écrire que $x \mapsto xe^{-x/2}$ est bornée et donc $xe^{-x} = O_{+\infty}(e^{-x/2})$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x/2}dx$ converge, $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ converge.

En fait on peut même procéder au calcul de cette intégrale. En effet, par intégration par parties, on a

$$\int_0^t xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}dx = -te^{-t} + \left[-e^{-x}\right]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

La limite de cette expression en $+\infty$ est 1 donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$.

Dans certains cas, on peut aussi comparer ces intégrales.

Proposition 3.2.4. *Soit f et g deux fonctions positives définies sur $[a,+\infty[$. On suppose que $f = o_{+\infty}(g)$. On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors*

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right).$$

- *Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge alors*

$$\int_a^{x} f(t)dt = o_{+\infty}\left(\int_a^{x} g(t)dt\right).$$

Démonstration. Pour le premier cas, notons que d'après la proposition précédente l'intégrale de f est convergente. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $f = o_{+\infty}(g)$, il existe x_0 tel que, pour $x \geq x_0$, on a $f(x) \leq \varepsilon g(x)$. Ainsi on a, pour $x \geq x_0$,

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)dt.$$

Ceci signifie exactement $\int_x^{+\infty} f(t)dt = o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right)$.

Pour le second cas notons que $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)dt = +\infty$. Fixons ε et x_0 comme ci-dessus. Comme $\int_a^x g(t)dt \to +\infty$, il existe $x_1 \geq x_0$ tel que pour tout $x \geq x_1$, $\int_a^{x_0} f(t)dt \leq \varepsilon \int_a^x g(t)dt$. Pour $x \geq x_1$, on a donc

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt \leq \varepsilon \int_a^x g(t)dt + \varepsilon \int_{x_0}^x g(t)dt \leq 2\varepsilon \int_a^x g(t)dt$$

Ceci signifie exactement $\int_a^x f(t)dt = o_{+\infty}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$. □

Exemple (Les intégrales de Bertrand). Les intégrales de Bertrand sont celles de la forme $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}dx$.

Si $\alpha > 1$, on considère $\alpha' \in]1, \alpha[$. Par les croissances comparées, on a $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = o_{+\infty}(\frac{1}{x^{\alpha'}})$. Comme $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha'}}dx$ converge, on a $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}dx$ converge (quelque soit la valeur de β).

Si $\alpha < 1$, on considère $\alpha' \in]\alpha, 1[$. Par les croissances comparées, on a $\frac{1}{x^{\alpha'}} = o_{+\infty}(\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x})$. Comme $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha'}}dx$ diverge, on a $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}dx$ diverge (quelque soit la valeur de β).

Si $\alpha = 1$, on a $\int_2^t \frac{1}{x \ln^\beta x}dx = \frac{-1}{\beta-1}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1} t} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}\right)$ si $\beta \neq 1$ et $\ln\ln t - \ln\ln 2$ si $\beta = 1$. Ainsi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta x}dx$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

En résumé

- Si $\alpha > 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}dx$ converge
- Si $\alpha < 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}dx$ diverge
- Si $\alpha = 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta x}dx$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exemple. Étudions $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. On a $e^{-x} = o_{+\infty}(\frac{1}{x})$ donc $e^{-x^2} = o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$. Ainsi, par comparaison avec les intégrales de Riemann, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

3.3 Intégrales impropres des fonctions de signe quelconque

3.3.1 Convergence absolue

Définition 3.3.1. Soit f une fonction dans $C^0_{pm}([a, +\infty[)$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f|(t)dt$ est convergente.

Notons que si f est continue par morceaux alors $|f|$ est continue par morceaux, ceci justifie le fait que l'on puisse considérer l'intégrale de $|f|$.

Proposition 3.3.2. *Soit $f \in C^0_{pm}([a,+\infty[)$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente. De plus, dans ce cas,*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \leq \int_a^{+\infty} |f|(t)dt$$

Démonstration. On considère $f^+(t) = \max(f(t),0)$ et $f^- = \max(-f(t),0)$ les parties positives et négatives de f de sorte que $f = f^+ - f^-$. On a $f^+, f^- \in C^0_{pm}([a,+\infty[)$ et, pour tout x, $0 \leq f^+(x) \leq |f|(x)$ et $0 \leq f^-(x) \leq |f|(x)$. Comme l'intégrale de f est absolument convergente, l'intégrale de $|f|$ est convergente. Ainsi par la Proposition 3.2.2, les intégrales de f^+ et f^- sont convergentes. Le Proposition 3.1.3 affirme alors que l'intégrale de $f = f^+ - f^-$ converge.

De plus, par inégalité triangulaire on a

$$\left|\int_a^{x} f(t)dt\right| \leq \int_a^{x} |f|(t)dt$$

Par passage à la limite, ceci donne le résultat. □

Exemple. $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^3}dt$ est convergente. En effet, on a $\frac{|\sin(t^2)|}{t^3} \leq \frac{1}{t^3}$ et $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ est une intégrale de Riemann convergente.

Le passage à la valeur absolue permet d'utiliser les règles de comparaison associées aux o et O. Elle permet aussi de comparer des intégrales de fonctions équivalentes.

Proposition 3.3.3. *Soit f et g deux fonctions définies sur $[a,+\infty[$. On suppose que $f \sim_{+\infty} g$. Alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ l'est. De plus si g est* ***positive****, on a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge on a*

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim_{+\infty} \int_x^{+\infty} g(t)dt.$$

- *Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge alors*

$$\int_a^{x} f(t)dt \sim_{+\infty} \int_a^{x} g(t)dt.$$

Démonstration. Si $f \sim_{+\infty} g$, on a $|f| \sim_{+\infty} |g|$ ainsi $|f| = O_\infty(|g|)$ et $|g| = O_{+\infty}(|f|)$ ce qui donne l'équivalence entre les convergences absolues. Ensuite si g est positive (notons alors que f aussi), on écrit $f = g + h$ avec $h = o_{+\infty}(g)$ et même $|h| = o_{+\infty}(g)$. Comme $\left|\int_x^{+\infty} h(t)dt\right| \leq \int_x^{+\infty} |h(t)|dt$, on a alors en utilisant la Proposition 3.2.4

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = \int_x^{+\infty} g(t)dt + \int_x^{+\infty} h(t)dt = \int_x^{+\infty} g(t)dt + o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right).$$

Le calcul ci-dessus donne exactement $\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim_{+\infty} \int_x^{+\infty} g(t)dt$.

Pour le second cas, en utilisant à nouveau la Proposition 3.2.4, on a

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x g(t)dt + \int_a^x h(t)dt = \int_a^x g(t)dt + o_{+\infty}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

ce qui est exactement $\int_a^x f(t)dt \sim_{+\infty} \int_a^x g(t)dt$. □

3.3.2 Règle d'Abel

Dans certains cas, l'étude de l'absolue convergence n'est pas suffisante, on peut parfois utiliser le résultat suivant.

Proposition 3.3.4 (Règle d'Abel). *Soient $f, g \in C^0([a, +\infty[)$ deux fonctions telles que*

- *$f \in C^1([a, +\infty[)$ est décroissante et $\lim_{+\infty} f = 0$ et*
- *$G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ est bornée.*

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Démonstration. On commence par effectuer une intégration par partie

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = [f(t)G(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)G(t)dt = f(x)G(x) - f(a)G(a) - \int_a^x f'(t)G(t)dt$$

Dans l'expression de droite le premier terme tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$, le second ne dépend par de x. Ainsi l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)dt$ l'est. Montrons que cette seconde intégrale est absoluement convergente. Notons que f' est négative et qu'il existe M tel que $|G(x)| \leq M$, on a alors

$$\int_a^x |f'(t)G(t)|dt \leq -M \int_a^x f'(t)dt = -M(f(x) - f(a)) \to Mf(a)$$

Autrement dit $f'G = O_{+\infty}(-f')$ et $\int_a^{+\infty} -f'(t)dt$ est convergente, donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)dt$ est absolument convergente. □

Exemple. Nous allons étudier la convergence des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{t}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}dt$ pour $\alpha \neq 0$.

Utilisons dans un premier temps la règle d'Abel avec $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \cos(\alpha t)$ ou $\sin(\alpha t)$. Tout d'abord l'hypothèse de décroissance et de limite de f est satisfaite. Pour la seconde hypothèse, on a $\int_1^x \cos(\alpha t)dt = \frac{1}{\alpha}(\sin(\alpha x) - \sin\alpha)$ qui en valeur absolue est toujours plus petit que $\frac{2}{\alpha}$. Ainsi par la règle d'Abel la première intégrale est convergente. Pour la seconde, le raisonnement est similaire.

L'utilisation de la règle d'Abel est importante car les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{t}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}dt$ ne sont pas absolument convergentes. Pour le montrer, on va utiliser que $|\sin(\alpha t)| \geq \sin^2(\alpha t)$ (en effet $|\sin(\alpha t)| \leq 1$) et prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha t)}{t}dt$ n'est pas convergente.

Rappelons que $\sin^2(\alpha t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha t))$. Ainsi

$$\int_1^x \frac{\sin^2(\alpha t)}{t}dt = \frac{1}{2}\int_a^x \frac{1}{t}dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos(2\alpha t)}{t}dt.$$

La première intégrale à droite est une intégrale de Riemann divergente et la seconde est convergente d'après ce qui précède. Ainsi l'intégrale de gauche diverge lorsque $x \to +\infty$.

Exemple. Que dire de la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}+2x\sin(x)}{x^2}dx$? Pour l'étudier, on va déterminer un développement asymptotique de l'intégrande en $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+x}+2x\sin(x)}{x^2} = \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x\sin(x)}{x^2} &= \frac{x(1+O_{+\infty}(\frac{1}{x}))+2x\sin(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} + 2\frac{\sin x}{x} + O_{+\infty}(\frac{1}{x^2})\end{aligned}$$

On sait que l'intégrale du premier terme $\frac{1}{x}$ n'est pas convergente et celles des deuxièmes et troisièmes termes sont convergentes. En conséquence l'intégrale de la somme est divergente.

3.4 Un exemple de calcul

Nous allons reprendre l'un des exemples précédents. Plus précisément considérons $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$. Notons qu'en 0 la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ d'étend par continuité avec la valeur 1. Ainsi on peut voir cette fonction comme étant continue sur $\mathbb{R}_+$. D'après un exemple précédent, on sait que l'intégrale est convergente en $+\infty$. Nous souhaitons maintenant déterminer sa valeur. Plus précisément nous allons montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Il n'existe pas de méthode « simple » pour démontrer ce résultat. La méthode que nous allons suivre n'utilise pas d'outils hors de la portée de ce cours. Toutefois il est important de noter qu'en utilisant des outils un peu plus évolués (intégrales à paramètres par exemple) on peut obtenir des preuves plus courtes.

Nous allons donc considérer les deux suites (J_n) et (K_n) définies par

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \qquad K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx$$

Tout d'abord notons que, comme $\sin u \sim_0 u$, on a $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \sim_0 2n+1$ et $\frac{\sin(2n+1)x}{x} \sim_0 2n+1$. Ainsi les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ et $x \mapsto \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ se prolonge par continuité en 0 par $2n+1$. Ainsi les intégrales ci-dessus doivent être comprises comme des intégrales de fonctions continues sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

• La suite (J_n) est constante et vaut $\frac{\pi}{2}$. Tout d'abord, on a $J_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$. En utilisant la formule trigonométrique $\sin p - \sin q = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$ on obtient

$$\begin{aligned}
J_n - J_{n-1} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x \cos 2nx}{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\cos 2nx dx \\
&= \left[\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2n}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi la suite (J_n) est constante.

• On a $\lim K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Pour cela on effectue le changement de variable $u = (2n+1)x$ qui donne

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{(2n+1)\sin u}{u} \frac{du}{2n+1} = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$$

Comme $(2n+1)\frac{\pi}{2} \to +\infty$, on a bien $\lim K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

• On a $\lim J_n - K_n = 0$. Pour cela on va étudier la fonction $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ sur $]0, \pi/2]$. En fait, on va montrer que f se prolonge en 0 en une fonction qui est C^1 sur $[0, \pi/2]$. Pour cela déterminons un développement de f au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2) - 1\right) \\
&= \frac{x}{6} + o_0(x)
\end{aligned}$$

On déduit de ce calcul que $\lim_0 f = 0$. En posant, $f(0) = 0$ on étend la définition de f sur $[0, \pi/2]$ et, de plus, la fonction ainsi définie est continue sur $[0, \pi/2]$. On a donc $f(x) = f(0) + \frac{x}{6} + o_0(x)$. Ceci nous permet d'affirmer que la fonction f est dérivable en 0 de dérivée $\frac{1}{6}$.

La fonction f est en fait C^1 sur $]0, \pi/2]$ et sa dérivée vaut $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}$. Déterminons la limite de cette expression en 0. On a :

$$\begin{aligned}
f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} &= -\frac{1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)}{(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3))^2} + \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)}{(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2))^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)}{1 - \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2))(1 + \frac{x^2}{3} + o_0(x^2))\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(1 - (1 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2})x^2 + o_0(x^2))\right) \\
&= \frac{1}{x^2}(\frac{1}{6}x^2 + o_0(x^2)) = \frac{1}{6} + o_0(1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_0 f'(x) = \frac{1}{6}$ et f' est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $f \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])$.

Nous allons noter $M = \sup_{[0,\pi/2]} f'$. On peut alors faire le calcul suivant

$$\begin{aligned}
J_n - K_n &= \int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2n+1)x dx \\
&= \left[-f(x)\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f'(x)\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} f'(x)\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} dx
\end{aligned}$$

car $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$ et $f(0) = 0$. Ainsi on a la majoration

$$|J_n - K_n| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{M}{2n+1} dx = \frac{M\frac{\pi}{2}}{2n+1} \to 0$$

- En combinant les différents résultats, on obtient

$$0 = \lim(J_n - K_n) = \frac{\pi}{2} - \lim K_n = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

ce qui donne bien $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

3.5 Sommes de Riemann et intégrale impropre

On a vu dans le chapitre précédent que les sommes de Riemann permettaient d'approcher la valeur de l'intégrale d'une fonction continue f sur un segment. Ce résultat repose sur l'uniforme continuité de la fonction f. Dans le cas de l'intégrale impropre d'une fonction f définie sur $[a, b[$, on dispose rarement de cette uniforme continuité. On peut toutefois avoir un résultat dans ce cadre.

Proposition 3.5.1. *Soit $[a, b]$ un segment. Soit $f \in C^0([a, b[)$ une fonction croissante telle que $\int_a^b f(x)dx$ est une intégrale convergente. On a alors*

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration. On pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. En utilisant la monotonie de f et le fait que l'intégrale soit convergente, on a, pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \leq \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

pour $k = 0$ on a juste la seconde inégalité. Ainsi en sommant pour tout k, on obtient

$$\frac{b-a}{n} f(a) + \int_a^{x_{n-1}} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \leq \int_a^b f(x)dx$$

Lorsque $n \to \infty$, $x_{n-1} \to b$ ce qui donne le résultat. □

Exemple. Considérons la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$. Nous pouvons réécrire cette somme sous la forme suivante

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction f est croissante sur $[0, 1[$. De plus on a

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin(x)]_0^t = \arcsin(t) \xrightarrow[t \to 1]{} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est convergente et $\lim u_n = \frac{\pi}{2}$.