Les "TP" de modélisation NE SONT PAS de purs TP de Python, même si la programmation en Python de plusieurs algorithmes sera un des objectifs majeurs.

Dans les "TD-TP", deux types d'exercices seront proposés :
– Des exercices "illustratifs" où l'on demande de traiter des exemples en utilisant la théorie puis d'illustrer les résultats obtenus par des simulations Python et peut-être d'aller un peu plus loin. **Pour ces exercices, la partie "bleue" devra être traitée AVANT d'arriver en TP afin de profiter au maximum du temps TP**.
– Dans beaucoup de cas, on proposera des exercices que vous ne saurez pas résoudre théoriquement (ou pas encore) : il s'agira de se donner une idée de ce que devrait être la solution du problème grâce à la programmation de méthodes adaptées.

Dans les deux cas, on attache une grande importance à l'interaction entre Maths et programmation car même si la théorie ne s'applique pas, on doit justifier l'application de tel ou tel algorithme.

Exercice prioritaire : étude numérique d'une suite au comportement complexe

Exercice 4 : (suite logistique)
On se propose d'étudier la suite :

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n), \quad x_0 \in [0,1] \ ,$$

où $a \in [0,4]$.
(i) Prouver que $x_n \in [0,1]$ pour tout n.
(ii) On suppose que $a < 1$. Prouver que $(x_n)_n$ converge vers 0 et le mettre en évidence numériquement pour plusieurs choix de x_0.
(iii) Donner un argument montrant que, si $a > 1$, $(x_n)_n$ ne peut plus converger vers 0, sauf si $(x_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang, i.e. $x_n = 0$ pour tout $n \geq N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$.
(iv) Prouver que, si $1 < a < 3$, la fonction $f_a(x) = ax(1-x)$ a un autre point fixe dans $[0,1]$ (en plus de 0) et que ce point fixe est attractif. Vérifier "expérimentalement" que $(x_n)_n$ converge vers ce point fixe quelque soit x_0.
(v) On s'intéresse maintenant au cas $a > 3$. Montrer que les deux points fixes ci-dessus existent toujours mais sont instables. Conclusion ?
(vi) Construire un programme Python qui renvoie un graphique montrant l'ensemble des points (a, x_n) pour $n \leq N$ où $(x_n)_n$ est la suite récurrente associée à a. (On pourra utiliser une commande Python du type :

plt.plot(r,s,color='black',ls='',marker='.',markersize=0.6)

pour mettre le point (r, s) sur un graphique et éviter que les points soient reliés...).
(vii) Si $N_1 < N_2$ sont deux entiers grands, construire un programme Python qui renvoie

un graphique montrant l'ensemble des points (a, x_n) pour $N_1 \leq n \leq N_2$ où $(x_n)_n$ est la suite récurrente associée à a. Que peut-on espérer mettre en évidence avec ce programme ?
(viii) Dans le cas, $a = 3.2$, mettre en évidence une suite qui a l'air d'être 2-périodique (i.e. $x_{n+2} = x_n$).
(ix) Faire grandir a et mettre en évidence des comportements avec des périodes de plus en plus grandes (on pourra regarder les cas $a = 3.8$ et $a = 3.829$).
(x) Dans le cas, $a = 4$, mettre en évidence un comportement chaotique : deux suites avec des x_0 très proches se comportent de manières très différentes ou du chaos (i.e. l'ensemble des valeurs d'adhérence est l'intervalle $[0, 1]$ tout entier).
(xi) En utilisant les programmes ci-dessus, montrer sur un même graphique l'ensemble des points $(a, \lambda(a))$ pour $a \in [2, 4]$ où $\lambda(a)$ est un valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ associée à a.

Pour aller plus loin : étude numérique d'une "double" suite (suite dans $\mathbb{R}^2$)

Exercice 5 : Proies-prédateurs (modèle discret)
On considère un milieu écologique constitué de proies et de prédateurs. Au temps $t = 0$, le nombre de proies est N_0 et on a P_0 prédateurs. On étudie l'évolution annuelle de ces populations : N_k et P_k sont respectivement les nombres de proies et de prédateurs la $k^{\text{ième}}$ année. On essaie de modéliser cette évolution via la suite récurrente :

$$N_{k+1} = 1,2N_k - 0,1P_k \ ,$$

$$P_{k+1} = 0,9P_k + 0,2N_k \ .$$

(i) Expliquer/justifier chacun des termes et en particulier les signes ou les valeurs des coefficients.
(ii) On suppose $N_0 > P_0$. Faire plusieurs simulations et observer le comportement de :

$$\frac{N_k}{|N_k| + |P_k|} \quad , \quad \frac{P_k}{|N_k| + |P_k|} \ .$$

(iii) Faire des simulations dans le cas $N_0 < P_0$. Que pensez-vous du modèle ?
(iv) On note :

$$X_k = \begin{pmatrix} N_k \\ P_k \end{pmatrix} .$$

Donner la matrice A telle que $X_{k+1} = AX_k$ et calculer ses valeurs propres λ_1, λ_2 et les vecteurs propres associés f_1, f_2.
(v) On suppose que $X_0 = c_1 f_1 + c_2 f_2$: que vaut X_1, X_2, $\cdots$,X_k ? Ceci explique-t-il les résultats numériques du (ii) ?