Université de Tours
Licence 2 Mathématiques

Contrôle continu 1

Arithmétique — Semestre 3

L'épreuve dure 2h. Les 4 exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la clarté et de la rigueur de la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$(a \mid bc \text{ et } \mathbf{pgcd}\,(a, b) = 1) \implies a \mid c.$$

   L'implication est-elle encore vraie si a et b ne sont pas premiers entre eux ? Justifier par une démonstration ou par un contre-exemple.

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}, \quad ax + by = 1,$$

   alors a et b sont premiers entre eux.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad (a \mid n \text{ et } b \mid n) \implies ab \mid n.$$

   Justifier par une démonstration ou par un contre-exemple.

4. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n - 3 \mid 5n - 7$.
5. Déterminer le reste de la division euclidienne de 100^{100} par 3, et par 7.

Exercice 2

1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que a et b sont premiers entre eux.
   (a) Montrer que $\mathbf{pgcd}\,(a + b, a - b) = 1$ ou que $\mathbf{pgcd}\,(a + b, a - b) = 2$.
   (b) Supposons que a et b ont la même parité (c'est-à-dire qu'ils sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs). Que vaut $\mathbf{pgcd}\,(a + b, a - b)$?
   (c) Que vaut $\mathbf{pgcd}\,(a + b, a - b)$ quand a et b sont de parités différentes ?
2. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer que $\mathbf{pgcd}\,(a, b) = \mathbf{pgcd}\,(a, a + b)$.
   (b) Soit $(u_n)_n$ la suite de Fibonacci suivante :

$$u_0 = 0, \ u_1 = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

   En utilisant la question précédente, montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{pgcd}\,(u_n, u_{n+1}) = 1.$$

Exercice 3

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, calculer $\mathbf{pgcd}\,(24, 87)$ et $\mathbf{pgcd}\,(105, 154)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$$24x + 87y = 9; \qquad 105x + 154y = 5.$$

Exercice 4
Dans cet exercice, on s'intéresse à l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{7}] := \left\{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1. Soient $z, \zeta \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Montrer que $z + \zeta \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et que $z \times \zeta \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
2. On rappelle que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.
   (a) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que
   $$a + b\sqrt{7} = 0 \iff (a = 0 \text{ et } b = 0).$$
   (b) En déduire que pour tous $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$,
   $$a + b\sqrt{7} = \alpha + \beta\sqrt{7} \iff (a = \alpha \text{ et } b = \beta).$$
3. On définit l'application suivante :
   $$\mathbf{N} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{7}] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{7} & \longmapsto & a^2 - 7b^2. \end{array} \right.$$
   (a) Calculer $\mathbf{N}(1)$ et $\mathbf{N}(2 + 3\sqrt{7})$.
   (b) Montrer que
   $$\forall z, \zeta \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}], \quad \mathbf{N}(z \times \zeta) = \mathbf{N}(z) \times \mathbf{N}(\zeta).$$

Soit $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Dans la suite de l'exercice, on dit que z **est inversible** si

$$\exists \zeta \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}], \quad z \times \zeta = 1.$$

4. Montrer que si $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est inversible, alors $\mathbf{N}(z) = 1$ ou $\mathbf{N}(z) = -1$.
5. Montrer que la réciproque est vraie.
   Indication : Remarquer que $\mathbf{N}(a + b\sqrt{7}) = (a + b\sqrt{7})(a - b\sqrt{7})$.
6. En utilisant les questions précédentes, déterminer un élément inversible $z = a + b\sqrt{7}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq b \leq 5$. Préciser son inverse.