Cours Analyse 4 : suites & séries de fonctions
(c) Boris Andreianov, 2019

Université de Tours
L2 Mathématiques

Chapitre I Suites de fonctions

I.0 Cadre étudié :

$I \subset \mathbb{R}$ (le plus souvent, I est un intervalle)

une suite de fonctions $(f_n(\cdot))_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou } \mathbb{N}^*, \text{ ou...)} \quad f_n : I \to \mathbb{R}$$

On visualise $(f_n(\cdot))_n$ comme une famille de courbes (graphes des fonctions $f_n(\cdot)$)

On veut décrire la convergence des courbes en question vers une "courbe limite", qui serait le graphe d'une fonction $f(\cdot)$.

⚠ diverses notions de convergence peuvent être utiles ici.

Rq On regardera parfois le cas des fonctions complexes (à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais aussi définies sur $I \subset \mathbb{C}$) ; il y a peu de différences avec le cas réel au niveau des notions mises en jeu.

I.1 Convergence simple

- C'est la notion "facile" : la seule nouveauté, comparé au Semestre 3, c'est la présence d'un paramètre $x \in I$ dans les calculs des $\lim_{n\to\infty} a_n$ (on aura $a_n = f_n(x)$, $\forall n$).
- La seule difficulté sera la disjonction des cas : on devra parfois choisir des techniques différentes de calcul de limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ selon la valeur fixée x.
- Le mot d'ordre de CVS est : {x est fixé, n bouge}

Exercice ① $f_n : x \mapsto \frac{x}{n}$ sur $\mathbb{R}$
② $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$

Dessiner les graphes de $f_1, f_2, f_3, f_4, f_8, \ldots$ et conjecturer la fonction limite dans chaque cas. On pourra se représenter les courbes "en mode film".

Déf (Convergence simple)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$, ...) $f_n(\cdot)$ une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que $f_n \to f$ simplement sur I si

pour tout $x \in I$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))_n$ a une limite et cette limite vaut $f(x)$.

On résume ceci dans : $\boxed{\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$

On désignera la convergence simple par le sigle "CVS".
On pourra dire "convergence ponctuelle" à la place de "simple".

* On remarquera que le terme défini n'est pas "CVS" mais "CVS sur I".
De fait, la notion dépend (un peu) de l'intervalle I choisi

Exemple $f_n : x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Si l'on regarde cette suite sur $I = [0,1]$,
il y a CVS vers la fonction limite $f : x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in [0,1[\\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Si l'on regarde cette suite sur $I = [0, 1/2]$
il y a CVS vers la fonction limite nulle en tout point

Si l'on regarde cette suite sur $I = \mathbb{R}$,
il n'y a pas CVS puisque pour certains $x \in I$, la suite $(x^n)_n$ diverge.

Reformulation technique de CVS

Afin de comprendre la notion de convergence uniforme (CVU) qui fera l'objet du Chapitre suivant, on va déchiffrer la notion de CVS en termes de ε, N_ε [ce langage s'impose dès qu'on tombe sur des preuves délicates!]

Déf bis (CVS en termes de ε)

On dit que la suite $(f_n(\cdot))_n$ de fonctions définies sur I
converge simplement (ponctuellement) sur I vers la fonction limite $f(\cdot)$, si

$$\boxed{\forall x \in I \quad \left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N_{\varepsilon,x} \text{ tq } \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \right]}$$

Il est essentiel, dans cette définition, que <u>N est autorisé à dépendre de x</u>

* Pour chaque x fixé, $N_{\varepsilon,x}$ augmente lorsque ε diminue.
La façon qu'a $N_{\varepsilon,x}$ d'augmenter avec $\varepsilon \downarrow 0$ décrit la vitesse de convergence de la suite $f_n(x)$ vers sa limite $f(x)$.
Dans la notion de CVS, cette vitesse est donc autorisée à dépendre de x.

Exemples ① Pour $f_n : x \mapsto \frac{x}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$, on calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et on trouve, pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, $N_{\varepsilon,x} = \frac{|x|}{\varepsilon}$.

On voit que pour $\varepsilon = 10^{-2}$,
- pour $x = 0$, $N = 0$ convient
- pour $x = 1$, $N = 100$ convient
- pour $x = 1000$, $N = 100000$ convient.

Lorsque x augmente, il faut dans cet exemple attendre plus longtemps pour la même précision d'approximation.

On essaie de répondre à la question : à partir de quel N, on peut dire que $f_n(x)$ vaut déjà, à ε près, sa limite $f(x)$!

② Pour $f_n : x \mapsto x^n$ sur $I=[0,1]$, on calcule $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1[\\ 1, & x=1. \end{cases}$

On trouve, pour $x \in]0,1[$ et $\varepsilon>0$, $N_{\varepsilon,x} = \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{x}}$

[Calcul : $|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon \iff |x^n - 0| \leq \varepsilon$

$\iff x^n \leq \varepsilon \iff n\ln x \leq \ln\varepsilon$ et, comme $0<x<1$

$\iff n \geq \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x} = \dfrac{-\ln\varepsilon}{-\ln x} = \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{x}}$ on a $\ln x<0$]

On remarque qu'on a bien, à x fixé, $N_{\varepsilon,x}$ qui augmente lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

De plus, la façon dont $N_{\varepsilon,x}$ augmente avec $\varepsilon\downarrow 0$ dépend de la valeur de x :

on a $N_{\varepsilon,x} = \text{const}(x)\cdot \ln\frac{1}{\varepsilon}$ avec $\text{const}(x) = \dfrac{1}{\ln\frac{1}{x}}$ $\begin{cases}\text{petite, si } x\approx 0\\ \text{grande, si } x\approx 1.\end{cases}$

On remarquera que, pour $x=0$ et pour $x=1$, $N_{\varepsilon,x}=0$ convient : pour ces deux valeurs de x, on a la convergence instantanée de $f_n(x)$ vers sa limite $f(x)$ ($\begin{matrix} f_n(0)=0 \\ f_n(1)=1\end{matrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$: on a deux suites stationnaires)

Exemples ① $f_n(x) = \frac{x}{n}$ pour $I=\mathbb{R}$:

- avec la valeur fixée du paramètre x, par exemple $x=2019$,

  on trouve $\lim_{n\to+\infty} f_n(2019) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2019}{n} = \frac{2019}{+\infty} = 0$

- ce principe de calcul convient pour toute valeur de x :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n} = \frac{x}{+\infty} = 0.$$

Donc $f_n(\cdot)$ converge vers la fonction nulle $f : x\mapsto 0$ simplement sur $\mathbb{R}$.

② $f_n(x) = x^n$ sur $I=[0,1]$:

- avec par exemple $x=2/3$, on trouve $f_n(2/3) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ (la suite q^n est un des exemples du Semestre 3 qui est de référence : il est à connaître par cœur)

la tentative de calcul de $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ fait apparaître la disjonction des cas : ici $x\in[0,1[$ et $x=1$

- le même calcul s'applique pour chaque x tel que $|x|<1$; comme on a ici $x\in I=[0,1]$, il s'applique à $x\in[0,1[$:

  pour tout $x\in[0,1[$ fixé, $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- le cas $x=1$ est alors à traiter à part : on a $f_n(1) = 1^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Donc, $f_n(\cdot)$ CVS sur $[0,1]$ vers $f : x\mapsto \begin{cases} 0, & x\in[0,1[\\ 1, & x=1.\end{cases}$

③ $f_n : x \mapsto \dfrac{n^2 x - n x^2}{n^2 x^2 + x + n}$

Rq on voit facilement que $\forall n \geq 1 \quad n^2x^2 + x + n > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $f_n(\cdot)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.

- avec $x = 17$,

$$f_n(17) = \frac{17n^2 - 17^2 n}{17^2 n^2 + 17 + n} \sim \frac{17 n^2}{17^2 n^2} = \frac{1}{17} \quad \text{(équivalence lorsque } n \to +\infty)$$

donc $f_n(17) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{17}$.

- Le même principe de calcul s'appliquerait-il pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Il faut détailler le raisonnement d'équivalence :

Les termes dominants(?) sont entourés

$$\frac{n^2 x - n x^2}{n^2 x^2 + x + n} = \frac{\cancel{n^2} x \left(1 - \frac{n x^2}{n^2 x}\right)}{\cancel{n^2} x^2 \left(1 + \frac{x}{n^2 x^2} + \frac{n}{n^2 x^2}\right)} = \frac{1}{x} \, \frac{(1 + \bar{\bar{o}}(1))}{(1 + \bar{\bar{o}}(1))} \sim \frac{1}{x}$$

à condition qu'on puisse diviser par x dès le début du calcul !

Morale : séparation des cas

Cette remarque nous amène à la disjonction des cas : $\begin{cases} x = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

- Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{x}$ d'après notre équivalence

Pour $x = 0$, $f_n(x) = \dfrac{n^2 \cdot 0 - n \cdot 0^2}{n^2 \cdot 0^2 + 0 + n} = \dfrac{0}{n} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Conclusion : $f_n(\cdot)$ CVS sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Rq Les cas à séparer apparaissent naturellement de la tentative de calcul, pour peu qu'on la fasse rigoureusement.

④ $f_n : x \mapsto x(1-x)^n$ sur $I = [0,1]$

La technique du calcul nous pousse à distinguer les cas $\left| \begin{array}{ll} |1-x| < 1 & \text{càd } x \in]0,1] \\ |1-x| \geq 1 & \text{càd } x = 0. \end{array} \right.$

On trouve $\forall x \in]0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x(1-x)^n$

$$= x \lim_{n\to\infty} (1-x)^n = x \cdot 0 = 0$$

et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 0(1-0)^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

donc, $f_n(\cdot)$ CVS sur $[0,1]$ vers la fonction identiquement nulle $f : x \mapsto 0$.

⑤ $f_n : x \mapsto e^{-nx^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

On remarque que $-nx^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ sauf pour $x = 0$; d'où la disjonction des cas

- $x = 0 \Rightarrow f_n(0) = e^{-n \cdot 0^2} = e^0 = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$
- $x \neq 0 \Rightarrow f_n(x) = e^{-nx^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\infty} = 0$.

D'où CVS de $f_n(\cdot)$ sur $\mathbb{R}$ vers la limite $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

Rq. On observe ici "une dégradation des propriétés de $f_n(\cdot)$" à la limite : la continuité des fonctions $f_n(\cdot)$ (évidente) n'est pas héritée par la fonction limite $f(\cdot)$ (manifestement discontinue en $x=0$)

- On peut étudier la vitesse de convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ selon la valeur de x. On trouvera que cette vitesse se dégrade lorsque x s'approche de 0. Exercice : trouver $N_{\varepsilon,x}$ dans ce cas, et analyser son comportement.

Ces deux remarques sont signes de non-uniformité de la convergence (affaire à suivre !)

(6) $f_n : x \mapsto x e^{-nx^3}$. On est amené à distinguer $x>0$, $x=0$ et $x<0$

Considérée sur $I=\mathbb{R}$, la suite $(f_n(\cdot))_n$ ne converge pas pour $x<0$:

$$x e^{-nx^3} \to x e^{+\infty} = -\infty \quad \text{quel que soit } x<0$$

(prendre $x=-13$ pour s'en convaincre).

Considérée sur $I=\mathbb{R}_+$, la suite $(f_n(\cdot))_n$ converge vers f identiquement nulle (il convient de distinguer $x>0$ et $x=0$ dans le calcul).

(7) $f_n : x \mapsto \left(1-\frac{x}{n}\right)^{2nx}$ sur $I =]-\infty, 1]$

Rq $\forall x \in I$, $\forall n \geq 1$, $1-\frac{x}{n} \geq 0$, ce qui donne un sens à la puissance non entière de $1-\frac{x}{n}$.

On arrive à calculer, sans distinction de cas,

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{2nx} = \exp\left(2nx \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left[2nx\left(-\frac{x}{n}\right)(1+\bar{o}(1))\right]$$

$$= \exp\left(-2x^2(1+\bar{o}(1))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-2x^2}$$

grâce au DL : $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = \left(-\frac{x}{n}\right) + \bar{o}\left(-\frac{x}{n}\right) = \left(-\frac{x}{n}\right)(1+\bar{o}(1))$ (valable car $-\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)

et à la continuité de la fonction $\exp(\cdot)$.

Donc, $f_n(\cdot)$ tend simplement sur $\mathbb{R}$ vers la limite $f : x \mapsto e^{-2x^2}$.

(8) $f_n : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in [0,n] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ sur $I=\mathbb{R}$. On notera $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$ (l'indicatrice de l'intervalle $[0,n]$).

- Dans ce type d'exemple, le formalisme avec $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est difficile à utiliser (car l'expression analytique de $f_n(x)$ varie avec n !)
- On utilise "le principe du pêcheur" : assis au bord de rivière, on regarde les graphes ("les vagues") passer...
- Par exemple, pour $x=2019$:

faire un croquis des graphes de $f_1, f_2, f_{10}, f_{2017}, f_{2020}$

Assis en ce point, on voit la valeur 0 de $f_n(2019)$ pour $n=0,1,\dots,2018$; et à partir de $n=2019$, on voit la valeur 1.

Alors on constate que $f_n(2019)$ est stationnaire à partir d'un certain rang, et elle tend vers 1.

• Ce raisonnement marche pour chaque $x \geq 0$ fixé !
"assis au point x", on voit qu'à partir d'un n assez grand $f_n(x)$ vaut 1.

En revanche, pour $x<0$ on voit toujours la valeur $f_n(x)=0$.

Conclusion : $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$ converge simplt sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto \begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

càd vers $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$.

(9) $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ càd $f_n : x \mapsto \begin{cases}1, & n\le x\le n+1\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$

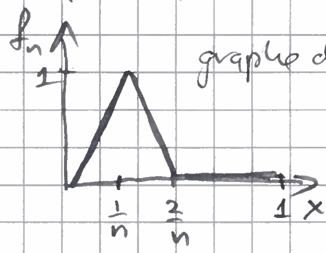
Le principe du pêcheur permet de constater que

pour $x<0$, on voit toujours la valeur 0 de $f_n(x)$
pour $x=0$, on voit $f_0(x)=1$ puis $f_n(x)=0$ pour $n\geq 1$
pour $x>0$, on voit $f_n(x)=0$ pour n petit,
puis on voit une ou deux fois $f_n(x)=1$
puis pour n plus grand, on voit $f_n(x)=0$.

Dans tous les cas, $(f_n(x))_n$ est stationnaire $=0$ à partir d'un rang (rang qui dépend de x !)

donc $f_n(\cdot)$ CVS sur $\mathbb{R}$ vers $f\equiv 0$.

(10) (pour $n\geq 2$) $f_n : x \mapsto \begin{cases} nx, & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ 2-nx, & \frac{1}{n}\le x\le\frac{2}{n}\\ 0, & \frac{2}{n}\le x\le 1\end{cases}$ sur $I=[0,1]$



graphe de $f_n(\cdot)$

Exercice : dessiner plusieurs graphes ($n=2,3,4,5$ ...) et "se faire un film" !

Le "principe du pêcheur" permet de voir que pour tout $x\in]0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

On distingue le cas $x=0$: $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Donc, $(f_n(\cdot))_n$ CVS sur $[0,1]$ vers la limite $f : x\mapsto \begin{cases}0, & x\in]0,1]\\ 0, & x=0\end{cases} = 0$.

(11) $g_n = nf_n$ avec f_n de l'exemple précédent, càd $g_n(x) = \begin{cases} n^2x, & x\in[0,1/n]\\ 2n-n^2x, & x\in[1/n,2/n]\\ 0, & x\in[2/n,1]\end{cases}$

Exercice : • mq g_n CVS sur $[0,1]$ vers la fonction nulle

• esquisser les graphes de $g_n(\cdot)$ (prendre un long axe des ordonnées) et constater que, vu globalement sur $[0,1]$, les graphes de $g_n(\cdot)$ s'écartent de plus en plus de la fonction nulle lorsque $n\to\infty$.

Ce comportement est un signe d'absence de convergence uniforme (affaire à suivre !)