Chapitre 4

Espaces euclidiens

Sommaire

4.1 Le dual d'un espace euclidien

Commençons par une constatation qui va jouer un rôle crucial dans ce chapitre :

Proposition 4.1. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (ou plus généralement un espace préhilbertien). Alors, pour tout $x \in E$, l'application $\varphi_x : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_x(y) = \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire sur E. De plus, on a $\varphi_x = O_{E^*} \Leftrightarrow x = O_E$.*

Démonstration. On a, pour tout $y, y' \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_x(\lambda y + y') = \langle x, \lambda y + y' \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle = \lambda \varphi_x(y) + \varphi_x(y')$$

donc φ_x est une forme linéaire sur E. De plus, si $x = O_E$, on a clairement $\varphi_x = O_{E^*}$. Inversément, si $\varphi_x = O_{E^*}$, on a, en particulier, $0 = \varphi_x(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Donc $x = O_E$. □

Théorème 4.2 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien, l'application $\Phi : E \to E^*$ définie par $x \mapsto \varphi_x$ avec φ_x la forme linéaire définie dans la proposition 4.1 est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) entre E et E^*. En particulier, pour tout $\varphi \in E^*$, il existe un unique $x \in E$ tel que $\varphi = \varphi_x$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que Φ est linéaire : $\forall x, x' \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda x + x'} = \lambda \varphi_x + \varphi_{x'}$. Ceci est une conséquence directe de la linéarité à gauche du produit scalaire. En effet, pour tout $y \in E$, on a

$$\varphi_{\lambda x + x'}(y) = \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle = \lambda \varphi_x(y) + \varphi_{x'}(y).$$

Par ailleurs, la proposition 1.2 montre que l'application Φ est injective (Ker $(\Phi) = \{x \in E, \varphi_x = O_{E^*}\} = \{O_E\}$) Comme E et E^* sont deux espaces vectoriels de même dimension (finie), on en conclut que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

Remarque. Ce résultat n'est plus vrai en dimension infinie. Soit, par exemple, $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ et φ la forme linéaire sur E définie par $\varphi(P) = P(1)$. Il n'existe pas de polynôme Q tel que $\varphi = \varphi_Q$. Supposons, en effet, qu'un tel polynôme existe. Alors, pour tout $P \in E$, on aurait $|\varphi(P)| = |\langle P, Q \rangle| \leqslant \|P\| \|Q\|$ (c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Prenons $P = X^k$. On a $\varphi(P) = P(1) = 1$ pour tout $k \geqslant 1$. Or, $\|P\|^2 = \int_0^1 P(t)^2 dt = \int_0^1 t^{2k} dt = \frac{1}{2k+1}$. Donc,

$$1 = |\varphi(P)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \|Q\|.$$

On arrive ici à une contradiction car le membre de droite tend vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$ alors que le membre de gauche reste égal à 1.

4.2 Familles orthogonales et orthonormales

Nous avons vu, dans le chapitre précédent que deux vecteurs u et v sont dits orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$. Nous allons étendre cette notion à une famille de vecteurs :

Définition 4.3. Une famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de p vecteurs de E, $p \geqslant 2$ est dite *orthogonale* si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, p\},\ i \neq j,\ \langle u_i, u_j\rangle = 0,$$

elle est dite *orthonormée* (ou *orthonormale* si, de plus, les vecteurs u_i sont unitaires ($\|u_i\| = 1$), ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, p\},\ \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij},$$

Remarque. La symétrie du produit scalaire assure que la matrice carrée d'ordre p définie par $(\langle u_i, u_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est symétrique. Cette matrice est appelée matrice de Gram de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et notée $G(u_1, \ldots, u_p)$. Par conséquent,

- $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille orthogonale de $E \Leftrightarrow G(u_1, \ldots, u_p)$ est diagonale $\Leftrightarrow \langle iu_i, u_j\rangle = 0$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant p$ (soit $\frac{p(p-1)}{2}$ égalités).
- De même $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille orthonormée de $E \Leftrightarrow G(u_1, \ldots, u_p) = I_p \Leftrightarrow \langle iu_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$ (soit $\frac{p(p+1)}{2}$ égalités).

Par exemple, pour établir que la famille (u_1, u_2, u_3) est orthogonale, il suffira de montrer que $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0$. Pour voir qu'elle est orthonormée, il faudra voir de plus que $\|u_1\|^2 = \|u_2\|^2 = \|u_3\|^2 = 1$.

L'égalité de Pythagore sétend aux familles orthogonales :

Proposition 4.4. *Pour toute famille orthonormale $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de vecteurs de E, on a*

$$\left\|\sum_{i=1}^p u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

Démonstration. La preuve est un simple calcul :

$$\left\|\sum_{i=1}^p u_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^p u_i, \sum_{j=1}^p u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i=j} \langle u_i, u_j\rangle + \sum_{i\neq j} \langle u_i, u_j\rangle = \sum_i \|u_i\|^2.$$

□

Attention cependant, la réciproque n'est vraie que pour une famille de 2 vecteurs. On peut très bien avoir $\left\|\sum_{i=1}^p u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$. sans que la famille soit orthogonale (!). Considérons l'exemple suivant dans $\mathbb{R}^2$: $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (0, 2)$ et $u_3 = (0, -1)$. Il est facile de voir que cette famille n'est pas orthonormée, par exemple, $\langle u_1, u_2\rangle = 4 \neq 0$. Cependant, on a $u_1 + u_2 + u_3 = (1, 3)$ donc $\|u_1 + u_2 + u_3\|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ et $\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2 = 5 + 4 + 1 = 10$.

Proposition 4.5. *Toute famille orthogonale $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dont aucun vecteur n'est nul ($\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $u_i \neq 0$) est libre. En particulier, toute famille orthonormée est libre.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$. On a alors, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$,

$$0 = \left\langle u_j, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_j, u_i \rangle = \lambda_j \langle u_j u_j \rangle.$$

Comme $u_j \neq 0$, on a $\langle u_j u_j \rangle = \|u_j\|^2 > 0$. On en déduit donc que $\lambda_j = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. □

Remarque.
- Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famillle orthogonale dont aucun vecteur n'est nul alors $\left((u_1, \dots, su_p), \dots, \dfrac{u_p}{\|u_p\|}\right)$ est une famille orthonormée.
- Lorsque $p = n(= \dim E)$, si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille orthogonale dont aucun vecteur n'est nul (resp. famille orthonormée), alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E qualifiée de base *orthogonale* (resp. *orthonormée*, qun'on abrègera en B.O.N.).

Donnons quelques exemples de bases orthonormées :

1. La base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée.
2. La base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}({}^t AB)$.

Théorème 4.6. *Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de E. Alors la base duale $(u_1^*, \dots, u_n^*)$ est donnée par $u_i^*(x) = \langle u_i, x \rangle$. En particulier, on a*

1. $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$,
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \langle u_i, y \rangle$,
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle^2$.

Démonstration. Reprenons la formule (1.3.1). Nous avons, pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} u_i^*(x) u_i$. En prenant le produit scalaire avec u_j, on obtient, $\langle u_j, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i^*(x) \langle u_j, u_i \rangle = u_j^*(x) \langle u_j, u_j \rangle = u_j^*(x)$, ce qui montre que $u_j^*(x) = \langle u_j, x \rangle$. On déduit de la formule (1.3.1) que $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$. On a alors

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, y \rangle u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle u_i, x \rangle \langle u_j, y \rangle \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle.$$

On obtient l'identité sur la norme de x en prenant $x = y$ dans l'égalité précédente. □

Théorème 4.7. *Tout espace vectoriel euclidien E admet au moins une base orthonormée.*

Démonstration. Nous allons montrer le résultat par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- Si $\dim(E) = 1$, soit $x \in E$ un vecteur non nul. Alors $e_1 = x/\|x\|$ est un vecteur unitaire ($\|e_1\|^2 = 1$) qui forme une base de E.
- Supposons maintenant le résultat vrai en dimension n. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n+1$. Soit $x \in E$ un vecteur non nul. Posons $e_{n+1} = x/\|x\|$. L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle e_{n+1}, x \rangle$ est une forme linéaire sur E, et $\varphi(e_{n+1}) = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \|e_{n+1}\|^2 = 1$ donc $\varphi \neq 0$. Soit $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Alors $\dim(H) = n$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence H admet une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$. Par construction, $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée de vecteurs de E. Elle est donc libre. Comme $\dim(E) = n+1$, c'est une base de E.

□

Remarque.
- Si, par convention, on convient que $\varnothing$ est une base (orthonormée) de E, alors le théorème s'étend à la dimension zéro.
- Ce théorème, même s'il est constructif (il donne un moyen de construire une base orthonormée de E), n'est pas la meilleure méthode pour construire effectivement une base orthonormée de E.
- Ce théorème nous permet d'affirmer qu'à isomorphisme près, il n'existe qu'un seul espace euclidien de dimension n. C'est, par exemple $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

La proposition suivante donne une caractérisation matricielle des familles orthogonales et orthonormées. Sa démonstration est immédiate.

Proposition 4.8. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$: $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $m_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. Alors*

1. *$\mathcal{B}$ est une base orthogonale si et seulement si M est diagonale,*
2. *$\mathcal{B}$ est une base orthonormée si et seulement si $M = \mathrm{Id}_n$.*

En particulier, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, on a, pour tous $u, v \in E$,

$$\langle u, v\rangle = {}^tU\ V, \tag{4.2.1}$$

avec $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes des coordonnées de $u = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n$ et $v = v_1e_1 + \cdots + v_ne_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

4.3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Nous avons maintenant tous les éléments en main pour terminer la preuve de la proposition 3.21. L'ingrédient principal va être le suivant :

Proposition 4.9. *Soient A un sous-espace vectoriel de E et $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de A ($k = \dim(A)$, l'existence d'une telle base est garantie par le théorème 4.7). Alors, l'application $p : E \to E$ définie par*

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i \tag{4.3.1}$$

est une projection sur A parallèlement à $A^\perp$ ($\mathrm{Ker}\, p = A^\perp$).

Démonstration. Puisque les applications $x \mapsto \langle x, e_i\rangle$ sont linéaires (voir la proposition 4.1), on voit que l'application p est linéaire. On a $p(x) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = A$ donc $\mathrm{Im}(p) \subset A$. Or, la famille $(e_1, \dots, e_k)$ étant orthonormée, on a, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$p(e_j) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, e_i\rangle e_i = \langle e_j, e_j\rangle e_j = e_j.$$

L'image de p contient donc la famille $(e_1, \dots, e_k)$ qui engendre A : $\mathrm{Im}(p) = A$.

On a ensuite

$$x \in A^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}, \langle x, e_i\rangle = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\ (p)$$

où, pour démontrer la première équivalence, nous avons utilisé le point 4 de la proposition 3.21 ($\{e_1, \dots, e_k\}^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)^\perp = A^\perp$) et, pour démontrer la seconde, nous avons utilisé le fait que la famille $\{e_1, \dots, e_k\}$ est libre.

Reste à voir que p est une projection. Or, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, on a $x = \sum_{j=1}^{k} x_je_j$ donc $p(x) = \sum_{j=1}^{k} x_jp(e_j) = \sum_{j=1}^{k} x_je_j = x$ (voir le calcul fait au début de la preuve). Ceci démontre que p est une projection. □

Fin de la preuve de la proposition 3.21. Soit p la projection définie dans la proposition 4.9. Alors, $A = \mathrm{Im}(p)$ et $A^\perp = \mathrm{Ker}\ (p)$. Comme p est une projection, $E = \mathrm{Ker}\ (p) \oplus \mathrm{Im}(p) = A^\perp \oplus A$.

En particulier, on voit que $\dim(A^\perp) = n - \dim(A)$ ($n = \dim(E)$). En appliquant deux fois cette formule, on a $\dim((A^\perp)^\perp) = n - \dim(A^\perp) = n - (n - \dim(A)) = \dim(A)$. Comme A et $(A^\perp)^\perp$ sont deux sous-espaces vectoriels de E avec $A \subset (A^\perp)^\perp$, on a donc $A = (A^\perp)^\perp$. □

4.4 Projections et symétries orthogonales

4.4.1 Projections orthogonales

Nous allons maintenant revenir plus en détail sur la projection introduite dans l'équation (4.3.1).

Définition 4.10. Soit F un sous-espace vectoriel de E On appelle *projection orthogonale* (ou *projecteur orthogonal* sur F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$ ($\operatorname{Ker} p_F = F^\perp$).

Remarquons deux cas particuliers : $p = \mathrm{Id}_E$ (resp. $p = 0$) est la projection orthogonale sur E (resp sur $\{0\}$). Nous verrons par la suite comment calculer la projection orthogonale sur F

Proposition 4.11. *Soient F un sous-espace vectoriel et p_F la projection orthogonale sur F. Alors :*

1. $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$,
2. $\mathrm{Im}(p_F) = F$ *et* $\operatorname{Ker}(p_F) = F^\perp$,
3. $\forall x \in F$, $p_F(x) = x$ *et* $p_{F^\perp}(x) = 0$,
   $\forall x \in F^\perp$, $p_F(x) = 0$ *et* $p_{F^\perp}(x) = x$,
4. $\forall x \in E$, $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.

Démonstration. Le seul point qui ne découle pas des définitions est le dernier point. Or, si $x \in E$, on a $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$ et les deux vecteurs $p_F(x)$ et $p_{F^\perp}(x)$ sont orthogonaux. Donc, en utilisant le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \geqslant \|p_F(x)\|^2$. □

Remarque. On peut prouver que si p est une projection telle que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, alors p est une projection orthogonale. En effet, si p est une telle projection et si $x \in \mathrm{Im}(p)$, $y \in \operatorname{Ker}(p)$, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x\|^2 = \|p(x+\lambda y)\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2.$$

En particulier, cela signifie que l'application $f : \lambda \mapsto \|x+\lambda y\|^2$ a un minimum en $\lambda = 0$. Sa dérivée s'annule donc en $\lambda = 0$. Or

$$f(\lambda) = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2.$$

Donc $2\langle x, y\rangle = f'(0) = 0$, ce qui démontre que $\operatorname{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux : $\operatorname{Ker}(p) \subset \mathrm{Im}(p)^\perp$. Comme $\dim(\operatorname{Ker}(p)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Im}(p)^\perp)$, on a $\operatorname{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^\perp$, ce qui démontre que p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(p)$.

Les projections orthogonales sont donc les endomorphismes de E tels que $p \circ p = p$ et $\mathrm{Im}(p) \perp \operatorname{Ker}(p)$. Ces projections peuvent s'écrire de manière simple dès lors qu'on a une base orthonormée de F (resp. de $F^\perp$) :

Proposition 4.12. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Soient $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de F et $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$. Alors*

1. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ *est une base orthonormée de E.*
2. $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{k}\langle x, e_i\rangle e_i = x - \sum_{i=k+1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i$,
3. $\forall x \in E$, $p_{F^\perp}(x) = \sum_{i=k+1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i = x - \sum_{i=1}^{k}\langle x, e_i\rangle e_i$,
4. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \mathrm{diag}(I_k, O_{n-k})$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp}) = \mathrm{diag}(O_k, I_{n-k})$.

Démonstration. Le premier point est évident : les familles de vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$ et $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont orthonormales et orthogonales entre elles (la première famille est une famillle déléments de F, la seconde d'éléments de $F^\perp$). Pour le second et le troisième points, on renvoit le lecteur à la preuve de la proposition 4.9. Les secondes formules sont basées sur le fait que $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$. Le quatrième point est immédiat. □

Signalons 2 cas particuliers importants :

- Si D est une droite vectorielle dirigée par $u \in D$, une base orthonormée de D est donnée par $u/\|u\|$. D'où

$$p_D(x) = \left\langle x, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \frac{u}{\|u\|} = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u$$

- Si H est un hyperplan de E, on peut écrire $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ avec φ une forme linéaire non-nulle sur E. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut écrire $\varphi = \varphi_u$ pour un certain $u \in E$. Alors $D = H^\perp = \mathrm{Vect}(u)$ est une droite vectorielle et, pour tout $x \in E$,

$$p_H(x) = x - p_D(x) = x - \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u.$$

Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, considérons l'hyperplan d'équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Alors, $H = u^\perp$ avec $u = (1, -1, 1)$ et $\|u\| = \sqrt{3}$. $D = \mathrm{Vect}(u)$ est la normale à H :

$$p_D(x_1, x_2, x_3) = \frac{\langle (x_1, x_2, x_3), u\rangle}{\|u\|^2}(1, -1, 1) = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{3}(1, -1, 1)$$

et

$$\begin{aligned} p_H(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) - p_D(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{x_1 - x_2 + x_3}{3}(1, -1, 1) \\ &= \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p_H) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.4.2 Symétries orthogonales

Définition 4.13. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle *symétrie orthogonale* par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à (dans la direction de) $F^\perp$. On la note s_F. C'est donc l'application linéaire s_F telle que

$$\begin{cases} s_F(x) = x & \text{si } x \in F, \\ s_F(x) = -x & \text{si } x \in F^\perp. \end{cases}$$

On a $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E = p_F - p_{F^\perp}$ avec p_F la projection orthogonale sur F.

Nous avons deux cas particuliers de symétries orthogonales : $s_F = \mathrm{Id}_E$ ($F = E$) et $s_F = -\mathrm{Id}_E$ ($F = \{0\}$). Parmi les endomorphismes de E, les symétries orthogonales s sont caractérisées par $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \perp \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. En utilisant le lien qu'il existe entre symétrie orthogonale et projection orthogonale, on en déduit :

Proposition 4.14. *Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport à F, alors si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormée de F et $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$,*

$$s_F(x) = 2\left(\sum_{i=1}^{k}\langle x, e_i\rangle e_i\right) - x = \left(\sum_{i=1}^{k}\langle x, e_i\rangle e_i\right) - \left(\sum_{i=k+1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\right).$$

Dans le cas particulier où $s = s_H$ est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan $H = u^\perp$ ($u \neq 0$), on a

$$s(x) = s_H(x) = -s_{\mathbb{R}u} = -\left(2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u - x\right) = x - \frac{2\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}.$$

Une telle symétrie est appelée *réflexion*.

Proposition 4.15. *Toute symétrie orthogonale s préserve la norme : $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$. Inversément, toute symétrie préservant la norme est une symétrie orthogonale.*

Démonstration. Si s est la symétrie par rapport à F, on a $s = p_F - p_{F^\perp}$ donc, pour tout $s \in E$, $s(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$. Les vecteurs $p_F(x)$ et $p_{F^\perp}(x)$ étant orthogonaux, on en déduit, en utilisant le théorème de Pythagore,

$$\|s(x)\|^2 = \|p_F(x) + p_{F^\perp}(x)\|^2 = \|p_F(x) - p_{F^\perp}(x)\|^2.$$

Inversément, si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, si $x \in F$ et $y \in G$, on a $s(x+y) = x - y$, donc

$$\|s(x-y)\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Si s préserve la norme, on a donc

$$\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2,$$

d'où $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui montre que $F \perp G$. Comme $F \oplus G = E$, on a donc $G = F^\perp$: s est une symétrie orthogonale. □

4.5 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 4.16. Soient $x \in E$ un "point de E" et A une partie non vide de E. On appelle *distance* de x à A, notée $d(x, A)$, la quantité

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\| = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

L'existence de ce nobre réel est assurée puisqu'il s'agit de la borne inférieure d'un ensemble non vide de réels minorés par 0. Si l'on suppose que l'infimum est atteint (c'est-à-dire qu'il existe $z \in A$ tel que $d(x, z) = d(x, A)$ alors z est le (ou plutôt l'un des) point de A les plus proches de x. $d(x, A)$ représente donc la distance entre x et le point de A le plus proche possible de x. En particulier, si $x \in A$, on voit que $d(x, A) = 0$.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas où $A = F$ un sous-espace vectoriel de E. Excluons tout d'abord les 2 cas triviaux :

- Si $A = E$, alors $d(x, E) = 0$ pour tout $x \in E$.
- Si $A = \{0\}$, alors $d(x, \{0\}) = \|x - 0\| = \|x\|$.

Théorème 4.17. *Soit F un sous-espace vectoriel non-trivial de E. Alors, pour tout $x \in E$,*

1. *il existe un unique $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$,*
2. *$y = p_F(x)$ avec p_F la projection orthogonale sur F,*
3. *$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2$.*

En particulier, ce théorème nous montre que l'infimum $d(x, F)$ est atteint dans le cas où F est un sous-espace vectoriel. Pouvez-vous trouver un exemple d'une partie A et d'un $x \in E$ tels que l'infimum $d(x, A)$ n'est pas atteint ?

Démonstration. Ecrivons $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$. On a, pour tout $y \in F$, que $p_{F^\perp}(x) \perp (p_F(x) - y)$ car, par définition, $p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$. Donc, en utilisant le théorème de Pythagore,

$$\|x - y\|^2 = \|(p_F(x) - y) + p_{F^\perp}(x)\|^2 = \|p_F(x) - y\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$$

On voit donc que $\|x - y\| \geqslant \|p_{F^\perp}(x)\|$ pour tout $y \in F$, d'où $d(x, F) \geqslant \|p_{F^\perp}(x)\|$ De plus, $\|x - y\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$ si seulement si $\|p_F(x) - y\| = 0$, c'est-à-dire si $y = p_F(x)$. Ceci démontre le théorème. □

Donnons maintenant un exemple de calcul de distance. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. Soient H l'hyperplan d'équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ et $x = (x_0, x_1, x_2)$ un point de E. $d(x, H) = \|p_{H^\perp}(x)\|$. Or, $H^\perp$ est la droite de E dirigée par $u = (1, -1, 1)$:

$$p_{H^\perp}(x) = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2} u, \quad \text{donc} \quad d(x, H) = \left\| \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2} u \right\| = \frac{|\langle x, u\rangle|}{\|u\|} = \frac{|x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{3}}.$$

4.6 L'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Nous allons maintenant voir comment transformer une base (ou plus généralement une famille libre) de E en une base (ou famille) orthonormée. Cette méthode est connue sous le nom d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Théorème 4.18. *Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre d'éléments de E. Il existe une unique famille orthonormale $(v_1, \dots, v_p)$ de E telle que, pour tout $l \in \{1, \dots, p\}$,*

1. *$F_l = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_l) = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_l)$ (c'est-à-dire $(v_1, \dots, v_l)$ est une base orthonormée de F_l)*
2. *$\langle u_l, v_l \rangle > 0$ (c'est-à-dire l'angle géométrique entre u_l et v_l est aigu).*

Passer de $(u_1, \dots, u_p)$ à $(v_1, \dots, v_p)$ c'est orthogonaliser $(u_1, \dots, u_p)$ par l'algorithme de Gram-Schmidt. L'algorithme est donné dans la preuve.

Démonstration. On fait une récurrence finie sur $l \in \{1, \dots, p\}$.

- Initialisation : $(l = 1)$ On cherche v_1 tel que $\operatorname{Vect}(u_1) = \operatorname{Vect}(v_1)$ avec $\|v_1\| = 1$ et $\langle u_1, v_1 \rangle > 0$. Or la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(u_1)$ contient exactement deux vecteurs unitaires $u_1/\|u_1\|$ et $-u_1/\|u_1\|$. La condition $\langle u_1, v_1 \rangle > 0$ impose de choisir
$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$
- Hérédité : Pour un entier l fixé, $l < p$, supposons obtenue de façon unique une famille orthogonale $(v_1, \dots, v_l)$ vérifiant les conditions énoncées et prouvons l'existence et l'unicité d'un vecteur v_{l+1} tel que
  1. La famille $(v_1, \dots, v_{l+1})$ est orthonormale,
  2. $F_{l+1} = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_{l+1}) = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_{l+1})$,
  3. $\langle u_{l+1}, v_{l+1} \rangle > 0$.

  Projetons orthogonalement u_{l+1} sur F_l. Comme, par hypothèse, $(v_1, \dots, v_l)$ est une base orthonormée de F_l, on a
$$p_{F_l}(u_{l+1}) = \sum_{i=1}^{l} \langle u_{l+1}, v_i \rangle v_i.$$
  Posons $\widetilde{v}_{l+1} = u_{l+-1} - p_{F_l}(u_{l+1}) = p_{F_l^\perp}(u_{l+1})$. De plus, $\widetilde{v}_{l+1} \in \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_l, u_{l+1}) = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_{l+1})$. La famille $(v_1, \dots, v_l, \widetilde{v}_{l+1})$ est une famille orthogonale de F_{l+1} dont aucun des vecteurs n'est nul ($\widetilde{v}_{l+1} \neq 0$ car sinon on aurait $u_{l+1} \in \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_l) = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_l)$ ce qui contredirait le fait que $(u_1, \dots, u_{l+1})$ est une famille libre). Par conséquent, $(v_1, \dots, v_l, \widetilde{v}_{l+1})$ est une famille libre qui engendre un sous-espace vectoriel de F_{l+1} de dimension $l+1$. Comme $\dim F_{l+1} = l+1$, on a donc $\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_l, \widetilde{v}_{l+1}) = F_{l+1}$.

  Par ailleurs, $u_{l+1} = \widetilde{v}_{l+1} + \sum_{i=1}^{l} \langle u_{l+1}, v_i \rangle v_i$ donc
$$\langle u_{l+1}, \widetilde{v}_{l+1} \rangle = \langle \widetilde{v}_{l+1}, \widetilde{v}_{l+1} \rangle + \sum_{i=1}^{l} \langle u_{l+1}, v_i \rangle \langle v_i, \widetilde{v}_{l+1} \rangle = \langle \widetilde{v}_{l+1}, \widetilde{v}_{l+1} \rangle > 0.$$
  Nous pouvons maintenant poser $v_{l+1} = \widetilde{v}_{l+1}/\|\widetilde{v}_{l+1}\|$. Ce vecteur satisfait les tros hypothèses que nous avons indiquées plus haut dans la preuve.

  Reste maintenant à voir l'unicité de v_{l+1}. Supposons qu'il existe un vecteur v'_{l+1} satisfaisant les trois hypothèses pour v_{l+1}. Alors, nécessairement $v'_{l+1} \in F_{l+1}$. Comme $(v_1, \dots, v_{l+1})$ est une base orthonormée de F_{l+1}, on a
$$v'_{l+1} = \sum_{i=1}^{l+1} \langle v'_{l+1}, v_i \rangle v_i.$$
  Or, comme $(v_1, \dots, v_l, v'_{l+1})$ est une base orthonormée de F_{l+1}, on a $\langle v'_{l+1}, v_1 \rangle = \cdots = \langle v'_{l+1}, v_l \rangle = 0$, d'où $v'_{l+1} = \langle v'_{l+1}, v_{l+1} \rangle v_{l+1}$ est colinéaire à v_{l+1}.

  Comme nous l'avons vu précédemment, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à v_{l+1}, ce sont v_{l+1} et $-v_{l+1}$ et v'_{l+1} est nécessairement égal à l'un d'entre eux. Comme, de plus, $\langle u_{l+1}, v'_{l+1} \rangle > 0$, ceci exclut le cas $v'_{l+1} = -v_{l+1}$, donc $v'_{l+1} = v_{l+1}$, ce qui démontre l'unicité de v_{l+1}.

□

En résumé l'orthonormalisé de Gram-Schmidt d'une famille libre $(u_1, \dots, u_p)$ est obtenue de la manière suivante :

1. On pose $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$.

2. Ensuite, pour tout $l \in \{2, \dots, p\}$, on pose

$$\widetilde{v}_l = u_l - \sum_{i=1}^{l-1} \langle v_i, u_l \rangle v_i$$

puis $v_l = \dfrac{\widetilde{v}_l}{\|\widetilde{v}_l\|}$.

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ est alors l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(u_1, \dots, u_p)$.

On oublie parfois la normalisation, celle-ci faisant apparaître des coefficients parfois assez compliqués en facteur des v_l. L'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut alors s'énoncer de la manière suivante :

1. On pose $\widetilde{v}_1 = u_1$.

2. Ensuite, pour tout $l \in \{2, \dots, p\}$, on pose

$$\widetilde{v}_l = u_l - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\langle \widetilde{v}_i, u_l \rangle}{\|\widetilde{v}_i\|^2} \widetilde{v}_i.$$

Un point important à remarquer est que, comme chaque v_l est dans F_l, la matrice de passage de $(u_1, \dots, u_p)$ à $(v_1, \dots, v_p)$ est *une matrice triangulaire supérieure*. Par ailleurs, la condition $\langle u_l, v_l \rangle > 0$ fait que cette matrice a ses termes diagonaux strictement positifs.

Cette méthode permet de construire de manière explicite bases orthonormées de n'importe quel espace euclidien. En particulier, elle permet de rendre explicites les calculs faits pour les projections et les symétries orthogonales.

Donnons quelques exemples d'orthonormalisation :

- Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On considère la base (u_1, u_2, u_3) de E avec $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (0, 1, -1)$. En utilisant les notations précédentes :

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}_1 &= u_1, \\
v_1 &= \widetilde{v}_1 / \|\widetilde{v}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \\
\widetilde{v}_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, \widetilde{v}_1 \rangle}{\|\widetilde{v}_1\|^2} \widetilde{v}_1 = u_2 - \frac{2}{2} u_1 = (0, 0, -1), \\
v_2 &= \widetilde{v}_2 / \|\widetilde{v}_2\| = (0, 0, -1), \\
\widetilde{v}_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, \widetilde{v}_1 \rangle}{\|\widetilde{v}_1\|^2} \widetilde{v}_1 - \frac{\langle u_3, \widetilde{v}_2 \rangle}{\|\widetilde{v}_2\|^2} \widetilde{v}_2 \\
&= u_3 - \frac{1}{2} \widetilde{v}_1 - \frac{1}{1} \widetilde{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \\
v_3 &= \widetilde{v}_2 / \|\widetilde{v}_2\| = \sqrt{2} \widetilde{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).
\end{aligned}$$

L'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base (u_1, u_2, u_3) est donc (v_1, v_2, v_3) avec

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad v_2 = (0, 0, -1), \quad v_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

- Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Nous allons calculer l'orthonormalisé (P_0, P_1, P_2, P_3) de la base canonique :

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_0 &= 1,\\
P_0 &= \widetilde{P}_0/\|\widetilde{P}_0\| = \frac{\sqrt{2}}{2},\\
\widetilde{P}_1 &= X - \frac{\langle X, \widetilde{P}_0\rangle}{\|\widetilde{P}_0\|^2}\widetilde{P}_0 = X - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} t \times 1 dt\right) 1 = X,\\
P_1 &= \widetilde{P}_2/\|\widetilde{P}_1\| = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2 dt}} X = \sqrt{\frac{3}{2}} X,\\
\widetilde{P}_2 &= X^2 - \frac{\langle X^2, \widetilde{P}_0\rangle}{\|\widetilde{P}_0\|^2}\widetilde{P}_0 - \frac{\langle X^2, \widetilde{P}_1\rangle}{\|\widetilde{P}_1\|^2}\widetilde{P}_1\\
&= X^2 - \frac{2/3}{2} \times 1 - \frac{0}{2/3} X = X^2 - \frac{1}{3},\\
P_2 &= \widetilde{P}_2/\|\widetilde{P}_2\| = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\\
\widetilde{P}_3 &= X^3 - \frac{\langle X^3, \widetilde{P}_0\rangle}{\|\widetilde{P}_0\|^2}\widetilde{P}_0 - \frac{\langle X^3, \widetilde{P}_1\rangle}{\|\widetilde{P}_1\|^2}\widetilde{P}_1 - \frac{\langle X^3, \widetilde{P}_2\rangle}{\|\widetilde{P}_2\|^2}\widetilde{P}_2\\
&= X^3 - \frac{0}{2} 1 - \frac{2/5}{2/3} X - \frac{0}{1/5} X^2 = X^3 - \frac{3}{5} X\\
P_3 &= \widetilde{P}_3/\|\widetilde{P}_3\| = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(X^3 - \frac{3}{5} X\right).
\end{aligned}$$

On voit avec ce dernier exemple pourquoi on se limite souvent à une orthogonalisation simple : les coefficients nécessaires pour normaliser les vecteurs deviennent rapidement compliqués.

Un corollaire de l'orthogonalisation de GramâĹŠSchmidt est la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive. Cette décomposition est très utile notamment en analyse numérique.

Théorème 4.19 (Décomposition de Cholesky). *Soit M une matrice symétrique définie positive, il existe une unique matrice T triangulaire supérieure telle que $M = {}^tTT$.*

Démonstration. L'idée est de voir $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ comme la matrice d'un produit scalaire, par exemple celui sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i,j} m_{ij} u_i v_j.$$

Soit T la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ à son orthogonalisé de Gran-Schmidt $\mathcal{B}'$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Par construction, la matrice T est triangulaire supérieure.

Puisque la base $\mathcal{B}'$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, sa matrice (du produit scalaire) dans la base $\mathcal{B}'$ est l'identité. D'où

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = {}^tT\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\langle\cdot,\cdot\rangle) T = {}^tT\,\mathrm{Id}_n\, T = {}^tTT.$$

□

4.7 Exercices

Exercice 4.1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Prouver que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

2. Prouver que si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien (i.e. $\dim(E) < \infty$) alors $\dim(F\cap G)^\perp = \dim(F^\perp + G^\perp)$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 4.2. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel dont on note $\|\cdot\|$ la norme issue du produit scalaire et d la distance définie par cette norme. Enoncer et prouver l'inégalité triangulaire pour d puis étudier son cas d'égalité.

Exercice 4.3. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$. On note $H = \{f \in E | f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des applications constantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que H est un hyperplan de E et G une droite vectorielle.
2. En déduire que $E = G \oplus H$.
3. Définir $G^\perp$ et $H^\perp$.
4. Soit $g \in H^\perp$
   (a) Prouver que $\displaystyle\int_0^1 tg(t)^2 dt = 0$.
   (b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = 0$.
   (c) Déterminer $H^\perp$.
5. A-t-on $(H^\perp)^\perp = H$? $H \oplus H^\perp = E$? $H^\perp + G^\perp = (H \cap G)^\perp$?

Exercice 4.4. Dans $E = C([-a,a],\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-a}^a f(t)g(t)dt$, justifier l'orthogonalité de l'ensemble des fonctions paires et de l'ensemble des fonctions impaires.

Exercice 4.5. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$, on pose $u = (\sqrt{3}, 1)$ et $v = (1, -1)$. Déterminer la mesure de l'angle géométrique (dans $[0, \pi]$) entre e_1 et u, entre e_1 et v et entre u et v.

Exercice 4.6. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(0) = 0\}$.

1. Justifier que F est un hyperplan de $E = \mathbb{R}_2[X]$ et en donner une base.
2. On pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
   (a) Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F.

   Même question pour $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

Exercice 4.7. Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit sclaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère l'hyperplan H d'équation $x - y + z + t = 0$.

1. Déterminer la matrice $P = M_{\mathcal{B}_0}(p_H)$ où p_H est la projection orthogonale sur H. En déduire la matrice $S = M_{\mathcal{B}_0}(s_H)$ avec s_H la réflexion par rapport à H.
2. Définir puis calculer $\alpha = d(e_1, H)$ (illustrer par une figure).

Exercice 4.8. Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère le sous-espace vectoriel F d'équations $\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$

1. Les vecteurs $u = (-2, 3, 2, -3)$ et $v = (1, 1, -1, -2)$ appartiennent-ils à F ?
2. Donner une base de F et une base de $F^\perp$.
3. Déterminer la matrice représentant p_F, la projection orthogonale sur F, puis celle représentant s_F, la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base $\mathcal{B}_0$.
4. Calculer la distance de u à F puis celle de v à F.

Exercice 4.9. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Déterminer l'orthonormalisée $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ de E par le procédé de Gram-Schmidt.
2. Interpréter géométriquement puis calculer $\alpha = \displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 dt$. Illustrer par une figure.
3. Jusfitier l'existence et l'unicité de $Q \in E$ tel que $\forall P \in E, P'(0) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$, puis déterminer Q.

Exercice 4.10. Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère les quatre vecteurs suivants :

$$u_1 = (0,1,1,1), u_2 = (1,0,1,1), u_3 = (1,1,0,1), \text{ et } u_4 = (1,1,1,0).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E. Est-elle orthogonale ?
2. Orthonormaliser $\mathcal{B}$ par la méthode de Gram-Schmidt.
3. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
   (a) Déterminer la matrice représentant p_F, la projection orthogonale sur F, dans la base $\mathcal{B}_0$.
   (b) Calculer $\alpha = d(u_3, F)$.

Exercice 4.11. Sur $E = M_n(\mathbb{R})$, on définit la forme bilinéaire b par $b(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Justifier que b définit un produit scalaire sur E.
2. Etablir que les espaces S_n des matrices symétriques et A_n des matrices antisymétriques sont des supplémentaires orthogonaux.
3. En déduire la distance d'une matrice A à S_n (pour la distance associée au produit scalaire b).

Exercice 4.12 (Matrices de Gram)**.** A chaque famille $(u_1, \dots, u_n)$ de n vecteurs ($n \in \mathbb{N}^*$) d'un espace préhilbertien réel, on associe sa matrice et son déterminant de Gram respectivement définis comme suit :

$$G(u_1, \dots, u_n) = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{et} \quad g(u_1, \dots, u_n) = \det(G(u_1, \dots, u_n)).$$

1. Prouver que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée si et seulement si $g(u_1, \dots, u_n) = 0$. On suppose désormais que la famille est libre et on pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
2. Quelle est la dimension de F ? Que représente alors $G(u_1, \dots, u_n)$?
3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F.
   (a) Prouver que $G(u_1, \dots, u_n) = {}^tPP$ avec P la matrice de passage de $(u_1, \dots, u_n)$ à $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire que $g(u_1, \dots, u_n) > 0$.
4. Déduire de ce qui précède une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de son cas d'égalité.
5. Prouver que pour tout $v \in E$, on a
$$d(v,F)^2 = \frac{g(u_1, \dots, u_n, v)}{g(u_1, \dots, u_n)}.$$
6. Retrouver, grâce à cette formule, le résultat de la dernière question de l'exercice 4.10. Commenter.