TD 4 : Congruences

Arithmétique — Semestre 1

Exercice 1 Soient a, b deux entiers plus grands que 1 dont les décompositions en facteurs premiers sont

$$a = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\alpha_k}, \quad b = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\beta_k}, \quad p_k \in \mathcal{P}, \quad \alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{N}.$$

Rappelons que (ou alors, on définit) :

$$\mathbf{pgcd}\,(a,b) = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}} \quad \text{et} \quad \mathbf{ppcm}\,(a,b) = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

1. Déterminer $\mathbf{pgcd}\,(40, 28)$ et $\mathbf{ppcm}\,(40, 28)$.
2. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\mathbf{pgcd}\,(a,b) \times \mathbf{ppcm}\,(a,b) = ab$;
   (b) $a \mid b \iff \mathbf{ppcm}\,(a,b) = b$;
   (c) pour tout $c \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{ppcm}\,(ac, bc) = c \times \mathbf{ppcm}\,(a,b)$;
   (d) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{ppcm}\,(a^n, b^n) = \mathbf{ppcm}\,(a,b)^n$.
3. La somme de deux entiers positifs est égale à 166 et leur **ppcm** est égal à 2520. Qui sont ces entiers ?

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $5^n - 1$ est divisible par 12 si et seulement si n est pair.
2. Démontrer que $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5.
3. Montrer que $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.
4. À quelle condition sur n a-t-on $7 \mid n^2 - 2n$?
5. Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

Exercice 3 Résoudre les congruences suivantes :

$$\begin{array}{lll@{\qquad}lll}
2x & \equiv 1 & \mod 7 & 4x & \equiv 6 & \mod 18 \\
12x & \equiv 9 & \mod 6 & 23x & \equiv 41 & \mod 52 \\
68x & \equiv 4 & \mod 30 & 5x & \equiv -1 & \mod 8 \\
20x & \equiv 4 & \mod 30 & 20x & \equiv 30 & \mod 4
\end{array}$$

Exercice 4 (Partiel 2019) L'objectif de cet exercice est de déterminer tous les couples d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ solutions de l'équation

$$2^m - 3^n = 1. \tag{1}$$

1. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
   (a) Montrer que si n est pair alors $3^n \equiv 1 \mod 8$.
   (b) Montrer que si n est impair alors $3^n \equiv 3 \mod 8$.
2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ une solution de (1). Montrer que $m \leq 2$.
3. En déduire tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ solutions de (1).