T D 5

Séries de Fourier

1 1) Déterminer les séries de Fourier associées aux fonctions suivantes:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = x$.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]0, 2\pi]$ par $g(x) = x$.

2) En déduire que

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \frac{x}{2}, \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 2\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction paire, 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1) Représenter le graphe de la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
3) Calculer la somme de la série de Fourier de f.
4) En déduire que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)x) = \frac{\pi}{4}.$$

3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction périodique de période 2π définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = x^2.$$

1) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2) Calculer la somme de la série de Fourier de f.
3) En déduire les valeurs des séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

1) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2) Calculer la somme de la série de Fourier de f.
3) En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

5 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \max(\sin x, 0)$.

1) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2) Calculer la somme de la série de Fourier de f.
3) En déduire que

$$\forall x \in [0,\pi], \quad \sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

6 Soit f la fonction 2π-périodique, impaire définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0,\pi]$.
1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f puis sa série de Fourier .
2) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}.$$

3) On considère la fonction g, 2π périodique, impaire et définie sur $[0,\pi]$ par

$$g(x) = \begin{cases} xf(1) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ f(x) & \text{si} \quad x \in [1,\pi] \end{cases}$$

a) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction g.
b) Calculer la somme de la série de Fourier de g. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}.$$

7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1. on note $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier de f.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n(f) = -\dfrac{1}{n}\, b_n(f')$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{n} a_n(f')$.
2) En utilisant l'inégalité $|xy| \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$. Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n(f)|$ et $\sum\limits_{n\geq 1} |b_n(f)|$ sont convergentes. En déduire que la série de Fourier de f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t)\,\mathrm{d}t$$