Université de Tours 2019-2020

L2-S3 UE 3-1 Algèbre

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1

Soient A et B des parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Donner les deux définitions du cours de $\text{Vect}(A)$ et justifier qu'elles coïncident.
2. Prouver l'équivalence : $A \subset \text{Vect}(B) \Leftrightarrow \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
3. Prouver l'équivalence : A s-ev de $E \Leftrightarrow \text{Vect}(A) = A$.
4. Etablir les deux égalités suivantes :
   a) $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$,
   b) $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Exercice 2

Soient $u_1, u_2, ..., u_p$, où p un entier naturel non nul, p vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Définir à l'aide de combinaisons linéaires : $\text{Vect}(u_1), \cdots, \text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_p)$ et prouver oralement que ce sont des s-ev de E.
2. Prouver les égalités suivantes :
   a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \text{Vect}(\lambda u_1, u_2, \cdots, u_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$,
   b) $\forall \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}^*, \text{Vect}(u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p, u_2, \cdots, u_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$.
3. Prouver que les ensembles suivants sont des s-ev d'ev réels de référence à préciser :
   a) $A = \{(2a - b, 3b, 4a - 5b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
   b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - b & 3b \\ 4a - 5b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$
   c) $C = \{2a - b + 3bX + (4a - 5b)X^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
   d) $D = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2a - b)n + 3b\sin(n) + (4a - 5b)\cos(n) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, on considère les quatre vecteurs suivants :
$u_1 = (5, 0, -7)$, $u_2 = (3, 7, 0)$, $u_3 = (2, 3, -1)$ et $u_4 = (1, -1, -2)$.
Prouver l'égalité $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(u_3, u_4)$ en déterminant les équations des deux plans.

Exercice 4

Soient u et v des vecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

1. Prouver les égalités :
   a) $\text{Vect}(u + v, u - v) = \text{Vect}(u, v)$,
   b) $\text{Vect}(u + iv, u - iv) = \text{Vect}(u, v)$.
2. Comparer : $\text{Vect}(iu + v, -u + iv)$ et $\text{Vect}(u, v)$.

Exercice 5

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$, on considère les deux vecteurs suivants :
$u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$.

1. Peut-on déterminer des réels x et y tels que $(x, 1, y, 1)$ appartienne à $\text{Vect}(u, v)$?
2. Peut-on déterminer des réels x et y tels que $(x, 1, 1, y)$ appartienne à $\text{Vect}(u, v)$?

Exercice 6

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$, on considère les deux vecteurs suivants :
$u = (1, -1, 2, 3)$ et $v = (1, 2, -1, 4)$.
Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x, y, z, t pour que le vecteur $w = (x, y, z, t)$ appartienne à $\text{Vect}(u, v)$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, justifier rapidement que F et G sont des s-ev de l'espace vectoriel réel E ; sont-ils supplémentaires dans E ?

1. E est l'ensemble des suites réelles convergentes ; F celui des suites réelles convergentes vers 0 et G celui des suites réelles constantes.
2. $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$; $F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ est constante}\}$.
3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$; $F = \{M \in E \mid {}^t M = M\}$ et $G = \{M \in E \mid {}^t M = -M\}$.
4. $E = \mathbb{R}[\mathbb{X}]$; $F = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

Exercice 8

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, on considère les trois s-ev suivants :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$; $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

1. Déterminer une base de chacun d'eux.
2. Déterminer :
   a) $F \cap G$, $F \cap H$, $G \cap H$;
   b) $F + G$, $F + H$, $G + H$ (Ces sommes sont-elles directes ?) ;
   c) $F + (G \cap H)$, $(F + G) \cap (F + H)$.