Exercices supplémentaires

Pour progresser

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f qu'on déterminera .
2) En considérant la suite $x_n = n$, montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3) a) En utilisant l'inégalité :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad \left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,+\infty[\,, \quad |f(x)-f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n}\,.$$

b) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,M]$, pour tout $M>0$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = n\left(e^{x/n}-1\right)$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x)=x$.
2) En utilisant la suite $x_n = n$, montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$, $a>0$.
4) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{f_n(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

3 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}}$.
On note $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = x \text{ si } x<0; \quad F(x)=0 \text{ si } x\geq 0.$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers F sur $\mathbb{R}$.
2) a) Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall n\geq 1, \forall x\leq 0, \quad |f_n(x)-F(x)| \leq -xe^{nx}.$$

$$\forall n\geq 1, \forall x\geq 0, \quad |f_n(x)-F(x)| \leq xe^{-nx}.$$

b) Déterminer $\sup_{x\in[0,+\infty[} xe^{-nx}$.
c) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$.
3) Calculer f_n' et étudier la convergence simple de la suite $(f_n')_{n\geq 1}$.
4) la convergence de la suite $(f_n')_{n\geq 1}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue non identiquement nulle qui vérifie $f(0) = 0$.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right).$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle.
2) Soit $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) \neq 0$. En considérant la suite $u_n = nx_0$, montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.
3) On se propose de montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, M]$, $M > 0$.
a) Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. En utilisant la continuité de f au point 0, montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, a] \quad |f(x)| \leq \varepsilon.$$

b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{M}{n_0} \leq a$. Montrer que

$$\forall n \geq n_0, \ \forall x \in [0, M], \quad \left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Conclure.

$\boxed{5}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n\left(1 - e^{-x/n}\right)}{(1+x^2)^2}$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $\varphi_n(x) = x - n\left(1 - e^{-x/n}\right)$.
a) Étudier les variations de φ_n sur $[0, +\infty[$ et déterminer le signe de $\varphi_n(x)$.
b) Soit a un réel strictement positif. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0, a], \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varphi_n(a).$$

c) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, a]$.
3) Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ sont convergentes et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$