Exercices Supplémentaires.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \sqrt{e^{-2x} + \dfrac{x}{n^2}}$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f qu'on déterminera.
2) En utilisant la suite $x_n = n^2$, montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.
3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, +\infty[, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{n}.$$

Indication: On pourra utiliser l'inégalité $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$, $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$.
En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, M]$, pour tout $M > 0$.
4) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

$\boxed{2}$ Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, 1]$. On désigne par $f(x)$ sa somme.
2) Étudier la convergence normale sur $[0, 1]$ de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$.
3) On suppose dans cette question que $a = 0$.
a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x, pour $x \in [0, 1]$. (Distinguer le cas $x = 1$).
b) En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4) On suppose que $a > 0$. Montrer que

$$x \leq f(x), \quad \forall x \in [0, 1[.$$

En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

$\boxed{3}$ Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$.

1) Montrer que f est bien définie sur $\in [0, 1]$.
2) Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.
3) Montrer que

$$\int_0^1 f(x)dx = \ln 2.$$

4) Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$.

$\boxed{4}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + e^{nx}}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On désigne par $f(x)$ sa somme.
2) Montrer que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$. En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.
5) Montrer que $\dfrac{1}{2} e^{-nx} \leq f_n(x)$, pour tout $x > 0$, et on a

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-x}} \leq f(x), \quad \forall x > 0.$$

En déduire la limite de f en 0^+.

$\boxed{5}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n+1} \left(1 - e^{-x/n}\right)$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On désigne par $f(x)$ sa somme.
2) Montrer que la convergence est normale sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$,on pose $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{x}$.
a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.
Indication: Utiliser l'inégalité $1 - e^{-t} \leq t$, $\forall t \geq 0$.
b) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.