T D 4

Séries entières

1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geq 0}\sin(n)x^n,\quad b)\ \sum_{n\geq 0}n!x^n,\quad c)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{n!}x^n,\quad d)\ \sum_{n\geq 0}\frac{4^n}{n+1}x^{2n}.$$

2 Soient $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, $\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

1) On suppose qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$ on a $|a_n|\leq|b_n|$. Montrer que $R'\leq R$.

2) On suppose que $|a_n|\underset{+\infty}{\sim}|b_n|$. Montrer que $R=R'$.

3) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1}\cos(\frac{1}{n})x^n$.

3 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$. On désigne par $S(x)$ sa somme. Donner les valeurs de $S(0)$, $S'(0)$.

2) Montrer que S est dérivable sur $]-1/2,1/2[$ et on a

$$\forall x\in]-1/2,1/2[,\qquad (1-2x)S'(x)-S(x)=0.$$

(*Indication: Remarquer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1}=(2n+1)a_n$.)

3) Pour tout $x\in]-1/2,1/2[$, on pose $\varphi(x)=S(x)\cdot\sqrt{1-2x}$. Calculer $\varphi'(x)$. En déduire que

$$\forall x\in]-1/2,1/2[,\qquad S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

4 1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\dfrac{n+2}{(n+1)!}x^n$. On désigne par $f(x)$ sa somme.

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\int_0^x tf(t)dt=x(e^x-1)$.

3) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.

5 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$a) \sum_{n\geq 0} n^2 x^n \qquad b) \sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n \qquad c) \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n!} x^n \qquad d) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n.$$

6 1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$
et préciser sa nature aux points $x = R$ et $x = -R$.
2) Montrer que la somme f de cette série est continue sur l'intervalle $[-R, R]$.
3) Déterminer une expression explicite de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$. Que vaut $f(0)$?
4) Déduire de ce qui précède que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln 2.$$

7 Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \qquad g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) \qquad h(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

8 1) Calculer la somme des séries entières suivantes pour tout nombre complexe z :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1+i)^n \frac{z^n}{n!} \qquad , \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (1-i)^n \frac{z^n}{n!}.$$

2) En déduire le développement en série entière des fonctions $e^x \cos x$ et $e^x \sin x$.

9 Chercher la série entière solution de l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0$$

vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

10 En utilisant les séries entières, résoudre l'équation différentielle :

$$xy''(x) + 2y'(x) + 4xy(x) = 0.$$

Exprimer les solutions à l'aide de fonctions usuelles.