Chapitre 1 : Principes de démonstration

1 Implication

- Une assertion est une phrase mathématique qui peut être soit vraie, soit fausse.

  Exemple 1.1. "$5+2=8$" est une assertion fausse. "$5+3=8$" est une assertion vraie.

- Une assertion peut dépendre d'une variable, auquel cas il faut des informations sur la variable pour conclure si elle est vraie ou pas. Par exemple "n est pair."
- Beaucoup de théorèmes sont de la forme : "Si P est vraie, alors Q est vraie" où P et Q sont deux assertions. On appelle P l'**hypothèse** et Q la **conclusion**. On note $P \Rightarrow Q$, ce qui se lit « P implique Q » , ou « l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie » . On dit aussi « P est une **condition suffisante** à Q » , et « Q est une **condition nécessaire** à P » .

> Méthode pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$
>
> - On suppose que P est vraie : « Supposons P » .
> - Viennent ensuite des « alors » , « donc » , « on en déduit » ...
> - On arrive jusqu'à Q : « Donc Q » .
> - On conclut si besoin : « Ainsi P implique Q » ou « Finalement, si P alors Q » .

En général, une implication est un énoncé universel : elle concerne tous les éléments pris dans une certaine classe d'objets (des entiers, des fonctions, des suites...). Dans ce cas, lorsqu'on demande de démontrer l'implication, il est sous-entendu qu'on doit la démontrer pour tous les objets de la classe.

Exemple 1.2. Soit n un entier. Montrer que si n est pair alors n^2 est pair.

Solution : On suppose que n est un entier pair. Alors n est multiple de 2, donc il existe un entier k tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ donc n^2 est pair. Ainsi, si n est pair alors n^2 est pair.

Exemple 1.3. Soient a, b et c trois entiers non-nuls. Montrer que si a divise[1] b, alors ac divise bc.

Solution : Supposons que a divise b. Alors il existe un entier k tel que $b = ka$. Donc $bc = kac$ et ac divise bc. Conclusion : si a divise b, alors ac divise bc.

⚠ L'implication "$P \Rightarrow Q$" n'affirme ni P, ni Q, mais le lien entre les deux. Pour cette raison, il faut éviter d'utiliser le symbole "$\Rightarrow$" comme une abréviation du mot « donc » ou « alors ». De manière générale et pour faciliter la lecture, on évite aussi de mélanger les symboles mathématiques avec les paragraphes de raisonnement rédigés en français[2].

EXERCICE 1.1. Soit n un entier. Montrer que si 4 divise n, alors 6 divise $3n$.

EXERCICE 1.2. Soient a, b et c trois entiers. Montrer que si a divise b et b divise c, alors a divise c.

EXERCICE 1.3. Soient a et b deux entiers non-nuls. Montrer que si a divise b et b divise a, alors $a = b$ ou $a = -b$

2 Notion de contrexemple

- À partir d'une assertion P, on peut construire sa **négation** non P : non P est vraie quand P est fausse et non P est fausse quand P est vraie.

  Exemple 2.1. La négation de " $x \geq 3$ " est " $x < 3$ ".

1. a divise b signifie qu'il existe un entier k tel que $b = k \times a$. Autrement dit, b est un multiple de a. Par exemple, 4 divise 12.
2. À quelques exceptions près, comme l'utilisation du signe "=" ou l'écriture de certains nombres en chiffres plutôt qu'en toutes lettres !

- Pour montrer qu'une assertion P est fausse, il suffit donc de montrer que sa négation $\mathsf{non}\ P$ est vraie.
- Soient P et Q deux assertions. L'implication $P \Rightarrow Q$ est elle-même une assertion, et admet donc une négation. La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P$ et $\mathsf{non}\ Q)$.

  Exemple 2.2. Par exemple, la phrase « il pleut et je n'ai pas mon parapluie » est la négation de la phrase « si il pleut, alors j'ai mon parapluie » .

- Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ concernant une classe d'objets x est fausse, il suffit donc de trouver un x qui vérifie P et $\mathsf{non}\ Q$. Un tel x est appelé « **contrexemple** ». La présentation d'un contrexemple constitue une démonstration rigoureuse qui se suffit à elle-même.

Méthode pour démontrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est fausse

- On trouve un x tel que $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse.
- On présente le x trouvé comme un contrexemple : « L'implication est fausse, comme le montre le contrexemple suivant... »
- On vérifie $P(x)$: « D'une part, on a $P(x)$ car... »
- On vérifie non-$Q(x)$: « Mais d'autre part, on n'a pas $Q(x)$ car... »
- On conclut si besoin : « Ainsi P n'implique pas Q » .

Exemple 2.3. Soit n un nombre entier. Montrer que l'implication suivante est fausse : " si n est premier alors $2n+1$ est premier ".

Solution : L'implication est fausse, comme le montre le contrexemple $n = 7$. D'une part, 7 est un nombre premier. Mais d'autre part, $2 \times 7 + 1 = 15 = 3 \times 5$, donc $2 \times 7 + 1$ n'est pas premier. Ainsi, n premier n'implique pas $2n+1$ premier.

Remarque 2.4. Pour résoudre cet exercice, il a fallu au brouillon dresser le tableau suivant

n	2	3	5	**7**	11
$2n+1$	5	7	11	**15**	23

On voit que sur les cinq premières valeurs possibles de n, seul $n = 7$ constitue un contrexemple.

EXERCICE 2.1. Soit n un nombre entier. Démontrer que les implications suivantes sont fausses :

1. Si 4 divise n^2 alors 4 divise n.
2. Si n est premier alors n est impair.
3. Si $n^2 = 16$ alors $n = 4$.

EXERCICE 2.2. Soient x et y des nombres réels. Est-ce que les assertions suivantes sont vraies ? Si oui, les démontrer. Sinon, donner un contrexemple.

1. $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
2. $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$
3. $x = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
4. Si $x = y + 1$ et $y = -x$ alors $x = y = 1$.
5. Si $x + y = 2$ et $xy = 1$ alors $x = y = 1$.

3 Réciproque d'une implication

- Soient P et Q deux assertions. La **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.
- La réciproque d'une implication peut être vraie ou fausse, **indépendamment** de la vérité ou de la fausseté de l'implication initiale.
- Puisque la réciproque d'une implication est elle-même une implication, on lui applique les mêmes techniques de démonstration.

Exemple 3.1. Soient a, b et c trois entiers non-nuls. Énoncer puis démontrer la réciproque de l'exemple 1.3.

Solution : La réciproque de l'exemple 1.3 est : si ac divise bc, alors a divise b. Démontrons-la. Supposons que ac divise bc. Alors il existe un entier k tel que $bc = kac$. Or c est non-nul, donc $b = ka$, c'est-à-dire que a divise b. La réciproque de l'exemple 1.3 est donc vraie.

EXERCICE 3.1. Soit n un nombre entier. On note respectivement P, Q et R les assertions "2 divise n", "3 divise n" et "4 divise n".

1. Que penser de l'implication $P \Rightarrow R$ et de sa réciproque ? Que penser de l'implication $P \Rightarrow Q$ et de sa réciproque ?
2. Démontrer les quatre affirmations faites à la question 1.

Définition 3.2. Soit x un nombre réel. On dit que x est rationnel s'il existe deux entiers relatifs p, q avec $q \neq 0$ tels que $x = \frac{p}{q}$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Un nombre qui n'est pas rationnel est dit irrationnel. Tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous la forme d'une fraction irréductible, c'est-à-dire telle que le numérateur p et le dénominateur q n'ont pas de facteur commun.

Par exemple, $\frac{2}{3}$ est rationnel, -2 est rationnel, mais $\sqrt{2}$ est irrationnel (voir Exemple 7.1).

EXERCICE 3.2. Soient x et y des nombres réels. Montrer que les assertions suivantes sont fausses, puis montrer que leurs réciproques sont vraies.

1. Si x^2 est rationnel, alors x est rationnel.
2. Si $x + y$ et xy sont rationnels, alors x et y sont rationnels.

EXERCICE 3.3. Étudier les réciproques des assertions de l'exercice 2.2.

4 Équivalence

- Soient P et Q deux assertions. Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$, on dit que P et Q sont **équivalentes** et on note $P \Leftrightarrow Q$. On dit aussi « P est vraie si et seulement si Q est vraie » .
- Par exemple, le théorème de Pythagore énonce une équivalence : on peut l'utiliser "dans les deux sens".
- Lorsque $P \Leftrightarrow Q$, les assertions P et Q sont "interchangeables" : Q est vraie quand P est vraie et Q est fausse quand P est fausse.

Méthode pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$

- On écrit qu'on procède par double implication.
- On démontre $P \Rightarrow Q$.
- On démontre $Q \Rightarrow P$.
- On conclut si besoin : « Ainsi, P si et seulement si Q » .

EXERCICE 4.1. Soient a, b et c trois entiers non-nuls. Démontrer que a divise b si et seulement si ac divise bc.

5 Succession d'équivalences

Lorsqu'on démontre une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ avec la méthode ci-dessus, il arrive que la démonstration de $Q \Rightarrow P$ soit la même que celle de $P \Rightarrow Q$, mais " écrite à l'envers ". C'est le cas lorsque les arguments permettant de démontrer $P \Rightarrow Q$ sont les mêmes que ceux utilisés pour la réciproque. On peut, **dans ce cas**, raisonner par succession d'équivalences, comme si on menait un calcul par égalités successives. On pensera alors à **justifier chaque étape** du raisonnement et à vérifier que les arguments fonctionnent " dans les deux sens ".

Exemple 5.1. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $x < y$ si et seulement si $\frac{-1}{x^3} < \frac{-1}{y^3}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
x < y &\Leftrightarrow x^3 < y^3 && \text{car la fonction } X \mapsto X^3 \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > \frac{1}{y^3} && \text{car la fonction } X \mapsto \frac{1}{X} \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[\\
&\Leftrightarrow \frac{-1}{x^3} < \frac{-1}{y^3} && \text{en multipliant par } -1 \text{ des deux côtés.}
\end{aligned}$$

Attention : dans les deux premières lignes, c'est la décroissance **stricte** qui fait fonctionner les équivalences dans les deux sens.

<u>EXERCICE</u> 5.1. Soit x un nombre réel différent de 1. Montrer que $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 > 1$ si et seulement si $x > 0$.

6 Contraposée d'une implication

Soient P et Q deux assertions. La **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication (non Q) $\Rightarrow$ (non P). Une implication et sa contraposée sont **équivalentes** : démontrer la contraposée revient à démontrer l'implication initiale.

Exemple 6.1. La contraposée de « si il pleut, alors j'ai mon parapluie » est « si je n'ai pas mon parapluie, alors il ne pleut pas ».
La contraposée de « si je gagne au loto alors j'ai joué au loto » est « si je n'ai pas joué au loto alors je ne gagne pas au loto ».

⚠ **La contraposée d'une implication n'est pas la négation de cette implication.**
⚠ **La contraposée d'une implication n'est pas la réciproque de cette implication.**

Méthode pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$

- On indique qu'on raisonne par contraposition.
- On suppose que Q est fausse : « Supposons non Q » .
- Viennent ensuite des « alors » , « donc » , « on en déduit » ...
- On arrive jusqu'à non P : « Donc non P » .
- On conclut si besoin : « Ainsi non $Q \Rightarrow$ non P, donc $P \Rightarrow Q$ » .

Exemple 6.2. Soit n un entier. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution : on raisonne par contraposée. Supposons que n n'est pas pair, donc n est impair. Alors $n-1$ est pair, donc il existe un entier k tel que $n-1 = 2k$, donc $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Donc n^2 est impair, donc n'est pas pair. Par contraposition, si n^2 est pair, alors n est pair.

<u>EXERCICE</u> 6.1. Soit n un entier et p un nombre premier. Montrer[3] que p divise n si et seulement si p divise n^2.

7 Démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une assertion P est vraie, on va supposer que P n'est pas vraie, et en déduire une contradiction. Donc notre hypothèse ne tient pas et P doit être vraie.

Méthode pour démontrer par l'absurde une assertion P

- On écrit « Supposons par l'absurde que P n'est pas vraie » .
- Viennent ensuite des « donc » , « on en déduit » ...
- On aboutit à une impossibilité et on écrit : « <u>Contradiction</u> ! Donc P est vraie ».

Exemple 7.1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Solution : On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. On peut donc écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible (c'est à dire que a et b sont deux entiers sans facteur commun). Alors $\sqrt{2}b = a$ et en élevant au carré, $2b^2 = a^2$. Donc a^2 est pair. Par l'exemple 6.2, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Alors $2b^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc $b^2 = 2k^2$. Par l'exemple 6.2, b est pair. Mais alors a et b sont tous les deux pairs, donc la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible. <u>Contradiction</u> ! Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

<u>EXERCICE</u> 7.1. Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

<u>EXERCICE</u> 7.2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

3. On admet le lemme d'Euclide : *Soit p un nombre premier et a, b deux entiers. Si p divise ab alors p divise a ou p divise b.*

8 Disjonction de cas

Il arrive qu'une assertion $P(x)$ soit vraie pour tout x mais pour des raisons différentes selon la valeur de x. Lorsque c'est le cas, il est nécessaire de structurer sa démonstration en plusieurs étapes, chacune correspondant à un ensemble de valeurs que peut prendre x. Si l'ensemble de tous les cas considérés recouvre toutes les valeurs possibles de x, on dit qu'on a raisonné par " disjonction de cas ".

Méthode pour démontrer $P(x)$ pour tout x.

- On écrit qu'on procède par disjonction de cas.
- On démontre $P(x)$ pour x vérifiant une certaine propriété $\mathcal{P}_1$: « Premier cas : x vérifie $\mathcal{P}_1$. Alors ... donc ... et $P(x)$ est vraie ».
- On démontre $P(x)$ pour x vérifiant une autre propriété $\mathcal{P}_2$: « Deuxième cas : x vérifie $\mathcal{P}_2$. Alors ... donc ... et $P(x)$ est vraie ».
- On répète cette étape jusqu'à avoir épuisé tous les cas possibles.
- On conclut : « Finalement, $P(x)$ est vraie pour tout x ».

Exemple 8.1. Soit n un nombre entier. Montrer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier.

Solution : On procède par disjonction de cas.

<u>Premier cas</u> : n est pair. Alors $n(n+1)$ est pair et $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

<u>Deuxième cas</u> : n est impair. Dans ce cas $n+1$ est pair, donc $n(n+1)$ est pair et $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Finalement, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier.

<u>EXERCICE</u> 8.1. Soit n un entier. Montrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$. Indice : séparer les cas $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$.

<u>EXERCICE</u> 8.2. Soit n un entier. Montrer que 24 divise $n(n+1)(n+2)(n+3)$.

9 Analyse – Synthèse

Certains problèmes mathématiques sont de la forme "trouver tous les x vérifiant P" (c'est le cas des équations à résoudre par exemple). On peut alors utiliser le raisonnement en deux étapes appelé "**analyse – synthèse**".

- **Analyse** : On suppose qu'on a trouvé une solution au problème et on en déduit des choses sur la solution. Cette étape permet de cerner l'ensemble des solutions éventuelles.
- **Synthèse** : Parmi les solutions éventuelles trouvées à l'étape d'analyse, on détermine celles qui sont effectivement solution et celles qui ne le sont pas.

Méthode pour trouver tous les x vérifiant P

- On écrit qu'on procède par analyse – synthèse.
- On suppose qu'on a une solution : « <u>Analyse</u> : soit x vérifiant P »
- On en déduit un ensemble $\mathcal{E}$ (petit) de solutions éventuelles : « Donc... Alors... Ainsi... Finalement x est dans $\mathcal{E}$ » .
- On étudie les solutions éventuelles : « <u>Synthèse</u> : dans $\mathcal{E}$, les seuls éléments vérifiant P sont... »
- On conclut : « <u>Conclusion</u> : les solutions au problème sont... »

Exemple 9.1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$ pour $x \geq -2$.

Solution : On procède par analyse – synthèse.

<u>Analyse</u> : soit $x \geq -2$ vérifiant $\sqrt{x+2} = x$. Alors en élevant au carré, $x + 2 = x^2$. Donc x est solution de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$. Le discriminant de cette équation est 9 et deux solutions sont possibles : $x = -1$ ou $x = 2$. Dans les deux cas, $x \geq -2$.

Synthèse : posons $x = 2$. Alors $\sqrt{x+2} = \sqrt{4} = 2 = x$. Donc $x = 2$ est solution de l'équation. Posons $x = -1$. Alors $\sqrt{x+2} = \sqrt{1} = 1$ et $x = -1$ n'est pas solution de l'équation.

Conclusion : l'unique solution de l'équation $\sqrt{x+2} = x$ est $x = 2$.

Exemple 9.2. Résoudre l'équation $|x| = \frac{1}{x}$ pour x réel non-nul.

Solution : on procède par analyse-synthèse.

Analyse : soit $x \neq 0$ tel que $|x| = \frac{1}{x}$. De deux choses l'une : ou bien $x > 0$, ou bien $x < 0$. Si $x > 0$, alors $|x| = x$, donc $x = \frac{1}{x}$ et en multipliant par x, $x^2 = 1$. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, donc $-x = \frac{1}{x}$ et en multipliant par x on a $-x^2 = 1$, ce qui n'est pas possible car un carré est toujours positif. Ainsi $x^2 = 1$, donc $x = 1$ ou $x = -1$.

Synthèse : Si $x = -1$, alors $|x| = 1$ mais $\frac{1}{x} = -1$, donc $x = -1$ n'est pas solution. Si $x = 1$, alors $|x| = 1 = \frac{1}{x}$ et $x = 1$ est donc solution.

Conclusion : L'unique solution de l'équation $|x| = \frac{1}{x}$ est $x = 1$.

EXERCICE 9.1. Résoudre sur $[1, +\infty[$ l'équation $\sqrt{x-1} = 1 - x$.

EXERCICE 9.2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+1| = x$. Indice : raisonner sur le signe de $|2x+1|$.

EXERCICE 9.3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+1| = x+1$.

10 Démonstration par récurrence

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier n. On veut souvent montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier à partir d'un certain n_0 (en général, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$). On peut alors tenter un **raisonnement par récurrence**.

Démonstration par récurrence

- On écrit qu'on procède par récurrence sur n.
- On écrit : « Initialisation : Montrons que $P(n_0)$ est vraie » .
  On démontre que $P(n_0)$ est vraie.
- On écrit : « Hérédité : On se donne un entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ est vraie et on doit montrer qu'alors $P(n+1)$ est vraie » .
  On démontre que $P(n+1)$ est vraie.
- On écrit : « Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ » .

Exemple 10.1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Solution : On procède par récurrence.

Initialisation : Montrons l'inégalité avec $n = 0$. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2}$. On a donc bien $u_0 \leq u_1$.

Hérédité : Donnons-nous un entier $n \geq 0$ et **supposons l'inégalité vraie au rang** n, c'est-à-dire que $u_n \leq u_{n+1}$. On doit montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$, autrement dit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Or par définition de la suite (u_n) on a $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + 1}$. Mais **par hypothèse de récurrence**, $u_n \leq u_{n+1}$. Donc $u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1$ et $\sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{u_{n+1} + 1}$ (par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$). Ainsi, $\sqrt{u_n + 1} \leq u_{n+2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Conclusion : Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Remarque : on utilise **toujours** l'hypothèse de récurrence à l'étape d'hérédité.

EXERCICE 10.1. Soit x un nombre réel positif. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

EXERCICE 10.2. On rappelle la formule

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

1. Soit θ un nombre réel. On suppose que $\cos(\theta)$ est rationnel. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $\cos(n\theta)$ est rationnel.
2. En déduire par l'absurde que $\cos(1°)$ est irrationnel.

11 La notation $\sum$ pour les sommes

Soit f une fonction et a, b deux entiers tels que $a \leq b$. On note $\sum\limits_{n=a}^{b} f(n)$ la somme des valeurs de f pour tous les entiers n tels que $a \leq n \leq b$:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b-1) + f(b).$$

Exemple 11.1. On a

$$\sum_{n=0}^{4} n^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$
$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14.$$

La variable sous le symbole "$\sum$" est une variable "muette" qui ne sert qu'à écrire la somme : le résultat final n'en dépend pas. On peut la noter n, k, i... de sorte que

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k}.$$

<u>EXERCICE</u> 11.1. Expliciter les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{4} k \qquad \sum_{k=1}^{4} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad \sum_{k=1}^{4} k^\ell \qquad \sum_{\ell=1}^{4} k^\ell \qquad \sum_{k=1}^{4} \ell \qquad \sum_{\ell=1}^{4} \frac{1}{k+\ell}.$$

<u>EXERCICE</u> 11.2. A l'aide du symbole $\sum$, écrire les sommes suivantes :

$$A = 17 + 18 + \cdots + 35 \qquad B = 2^6 + 2^7 + \cdots + 2^{13}$$
$$C = 30 + 33 + 36 + \cdots + 297 + 300 \qquad D_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}.$$

Le raisonnement par récurrence est souvent utile pour démontrer des formules sur des sommes.

Exemple 11.2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution : On procède par récurrence.

<u>Initialisation</u> : montrons que la formule est vraie pour $n = 0$. On a d'une part

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0$$

et d'autre part,

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0.$$

Donc la formule est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité</u> : donnons-nous un entier $n \geq 0$ et supposons que la formule soit vraie au rang n. On doit montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Or on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) && \text{séparation du dernier terme} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{par } \textbf{hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && \text{même dénominateur} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{factorisation par } (n+1).
\end{aligned}
$$

Conclusion : par récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

EXERCICE 11.3. Soit $q \neq 1$ un nombre réel. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

EXERCICE 11.4. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

EXERCICE 11.5. Soient a et b deux réels. Montrer par récurrence la **formule du binôme de Newton** : pour tout entier $n \geq 0$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On rappelle que le coefficient binomial « k parmi n » est défini par la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$