Mathématiques pour l'ingénieur : analyse

Université de Tours
U. F. R. Sciences et Techniques - Blois
Année scolaire : 2022 - 2023

L2 ANALYSE | CHAPITRE 1

COMPARAISON DE FONCTIONS : NOTATIONS DE LANDAU

L'objet de cette leçon est d'introduire un des outils fondamentaux de l'analyse, il est utile aussi bien pour l'étude des suites que des fonctions. En informatique, elle est utilisé pour calculer la complexité des algorithmes. En effet, la notation de Landau n'est pas qu'une simple question de notation : il s'agit de mieux quantifier certains comportements asymptotiques, à l'image des croissances comparées. Nous allons voir trois concepts : la négligeabilité, l'équivalence et la domination.
On va mettre ici en évidence trois types de comparaison entre deux fonctions f et g. Si la fonction g ne s'annule pas, cela revient à regarder f/g et voir si le quotient :

- ⋆ il tend vers 0 (négligeabilité.)
- ⋆ il tend vers 1 (équivalence.)
- ⋆ ou il *reste borné* (domination.)

I). Négligeabilité

Définition 1.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies dans un voisinage autour de x_0. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si il existe une fonction $\varepsilon(\cdot)$ définie au voisinage de x_0 telle que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

NOTATION : On écrit $f = o(g)$, qui se prononce « petit o » de g.

Si la fonction g ne s'annule pas, on voit facilement que cela signifie exactement que le quotient f/g tend vers 0 lorsque $x \to x_0$. En d'autres termes, pour faire le lien avec une notation vue précédemment, $f = o(g)$ signifie exactement $f \ll g$.

La notation $f = o(g)$ est un abus d'écriture. Au sens mathématique, on devrait écrire $f \in o(g)$ où $o(g)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions qui sont négligeables devant g lorsque $x \to x_0$. C'est un abus qui est fait en permanence mais il faut y faire attention : il ne s'agit pas d'une égalité au sens usuel.

EXEMPLE : On a déjà vu plusieurs relations de ce type. Par exemple, $\ln(x) = o(\sqrt{x})$ en $+\infty$. En effet, on a démontré que $\ln(x)/\sqrt{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 1.

Démontrer que $e^x\sqrt{x} = o\left(e^{2x}\right)$ en voisinage de 0 et $+\infty$.

II). Équivalence

Définition 2.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies dans un voisinage autour de x_0. On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si $f(x) = \alpha(x)g(x)$ pour une fonction α qui tend vers 1. En d'autres termes, le quotient f/g tend vers 1 lorsque $x \to x_0$.

NOTATION : On écrit $f \sim g$.
EXEMPLE : $x + 1/x \sim x$ en $+\infty$. En revanche, c'est évidemment faux lorsque $x \to 0$.

Exercice 2.

Démontrer que $7x^3 + 3x^2 + x = O(x)$ en $+\infty$. De même $\ln(x) + \cos\left(x^2 + e^{-x}\right) - \sqrt{x} \sim -\sqrt{x}$ en $+\infty$.

A l'aide du développement limité on peut trouver des équivalence polynomial simple au voisinage d'un point. On rappelle les équivalences suivantes que vous avez déjà vu :

- $\sin(x) \sim x$ en 0.
- $\ln(x+1) \sim x$ en 0.
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ en 0.

III). Domination

Définition 3.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies dans un voisignage autour de x_0. On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 si $f(x) = M(x)g(x)$ pour une fonction M qui est bornée. En d'autres termes, le quotient f/g est borné lorsque $x \to x_0$.

NOTATION : On écrit $f = O(g)$, que l'on prononce « grand o» de g. Il s'agit donc ici de démontrer que $|f/g| \leq C$ pour une constante C.
EXEMPLE : $-5 + \cos(2x + 1/x) = O(1)$ en $+\infty$. De façon plus générale, toute fonction bornée appartient à $O(1)$. De même, $x^2/(1 + x\cos(x)) = O(x)$ en $+\infty$.

Exercice 3.

Démontrer que $(\cos(x^2) + 3)e^x = O(e^x)$ en $+\infty$. De même en 0.

IV). Propriétés et manipulations élémentaires

L'arithmétique et la manipulation des o, O et $\sim$ est subtile. Même si des règles naturelles existent (par exemple "o $(g) + o(g) = o(g)$ "), il vaut mieux à ce stade faire des calculs de limite des quotients f/g à chaque fois.

Propriétés 1.

On a les propriétés suivantes :

- Si $f = o(g)$ ou $f \sim g$, alors évidemment $f = O(g)$ mais il n'y a pas d'autres relations entre ces différentes notions.
- Si $f(x) = g(x) + o(g(x))$, alors $f(x) \sim g(x)$.
- Si $f = o(g)$ alors pour toute fonction h, $fh = o(gh)$. Des résultats similaires sont valable pour la domination et l'équivalence.
- Si $f(x) = o\left(x^n\right)$ alors $f(x)/x^n = o(1) \to 0$.
- **Cas des polynômes.** Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors quand x tend vers 0 on a $P(x) \sim a_{k_0} x^{k_0}$ où a_{k_0} est le premier coefficient non nul de P. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(x) &= a_{k_0} x^{k_0} + a_{k_0+1} x^{k_0+1} + \cdots + a_n x^n \\ &= a_{k_0} x^{k_0} + x^{k_0+1}(a_{k_0+1} + \cdots) \\ &= a_{k_0} x^{k_0} + o\left(x^{k_0}\right) \sim a_{k_0} x^{k_0}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

Démontrer les propriétés.

NOTATION :

- La classe $o(1)$ désigne l'ensemble des fonctions qui tendent vers 0 . En effet, $f = o(1)$ signifie que $f/1 = f \to 0$. On utilise couramment la notation $o(1)$ dans ce sens.
- La classe $O(1)$ désigne l'ensemble des fonction bornées (au voisinage du point considéré).

FEUILLE D'EXERCICES I

L2 ANALYSE| COMPARAISON DE FONCTIONS : NOTATIONS DE LANDAU

Exercice 1.1

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de 0 et que telles que lorsque x tend vers 0, on a $f(x) = o(x)$, $g(x) = o(x^2)$. Peut-on dire que $g(x) = o(f(x))$? Que $f(x) = o(x^2)$? Que $g(x) = o(x)$? Que $f(x) \not\sim x$?

Exercice 1.2

Soient $f(x) := x(1 + \sqrt{x})$ et $g(x) = (x-1)\ln(x)(1 + e^{-x})$.

1. Démontrer que $f(x) \sim x^{3/2}$ et $g(x) \sim x\ln(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
2. En déduire un équivalent de $f(x)/g(x)$ en $+\infty$.
3. Démontrer que $f(x)/g(x) \to +\infty$.
4. Démontrer que $f(x)/g(x) = o(\sqrt{x})$.

Exercice 1.3

Soit $f(x) = (\cos(x^2) + a)e^x - \sqrt{x^3 + 2}$ où a est un réel. On s'intéresse ici à $x \to +\infty$.

1. Démontrer que si $a = 2$, $f(x) \sim (\cos(x^2) + a)e^x$ mais que c'est faux si $a = 1$.
2. Démontrer que $f(x) = O(e^x)$.
3. Supposons $a = 2$. A-t-on $f(x) \sim 2e^x$?

Exercice 1.4

1. Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au voisinage de $+\infty$:
   - a) $-5x^3 + \pi x^4 - \ln 2$
   - b) $2e^x - \frac{1}{3}x^{12} + \sqrt{2}\ln x$
   - c) $\frac{e^{x+1} + \ln x}{e^{x-1} + x + 1}$
   - d) $\ln(x + 2)$
   - e) $e^{2x} - 9e^{\sqrt{x}} - \ln(3x)$
   - f) $x^2 + 8x^2\ln x + \frac{2x}{\ln x}$
   - g) $\frac{\sin x}{x^3} - \frac{4}{x\sqrt{x}}$
   - h) $e^{2x+3} - e^{2x} - 9$
   - i) $\frac{\ln(3 + x^4)}{\ln 3 + 2\ln(2x^2)}$
   - j) $\frac{2}{x^2\sqrt{x}} - \frac{\pi}{x} + \frac{12}{\ln x} - 5e^{-x}$
2. Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au voisinage de 0 :
   - a) $\sin x - 3$
   - b) $\sin x - x + x^2$
   - c) $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \cos x - 1$
   - d) $\cos x - e^x$
   - e) $\frac{\ln(3 + x^4)}{\ln 3 + 2\ln(2x^2)}$

Exercice 1.5

En utilisant un équivalent simple du numérateur et du dénominateur, déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)}$
- b) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos x}$
- c) $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x^3}$
- d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - \ln(e^2 - x)}{x^2}$
- e) $\lim_{n\to +\infty} \frac{2^{2n} - 4n}{n^{100} - 4^{n+2}}$
- f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - \sin(x^2)}{x\ln x}$
- g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x}}$

L2 ANALYSE|CHAPITRE 2

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Dans un cours précédent vous avez vu la définition de l'intégrale qui s'applique aux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$. La fonction est en particulier définies et bornées sur cet intervalle. Cette notion permettait notamment de calculer l'aire sous la courbe de la fonction. On va voir ici deux généralisations de ce concept. Dans un premier temps, on va montrer comment donner un sens à une intégrale sur un intervalle non borné, comme par exemple $\mathbb{R}^+$, ou même $\mathbb{R}$, ainsi qu'à l'intégrale de fonctions qui ne sont plus bornées sur l'intervalle $[a, b]$ — ces intégrales, improprement définies pour l'instant, sont justement appelées intégrales impropres ou bien intégrales généralisées.

I). Définitions, propriétés

1. Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$

NOTATION : On note $\mathcal{CM}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 1.

— Soient $[a, b[$ un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et $f \in \mathcal{CM}([a, b[)$. Si l'application F définie, pour tout réel x de l'intervalle $[a, b[$, par :

$$\begin{aligned} F : \quad [a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)dt, \end{aligned}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t)dt$ **converge** et on note $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} F(x) = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.}$

— Soient $]a, b]$ un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ (avec $-\infty \leq a < b < +\infty$) et $f \in \mathcal{CM}(]a, b])$. Si l'application F définie, pour tout réel x de l'intervalle $]a, b]$, par :

$$\begin{aligned} F : \quad]a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_x^b f(t)dt, \end{aligned}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t)dt$ **converge** et on note $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt.}$

— Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **diverge**.

NOTATION : On utilise par fois la notation $\int_{\to a}^{b} f(t)dt$ ou bien $\int_{a}^{\to b} f(t)dt$ pour mieux signaler la borne qui présente une "singularité" pour la fonction f ; par cette convention informelle $+\infty$ et $-\infty$ sont toujours des singularités.

Exercice 1.

Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale généralisée

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

est-elle convergente ? Donner, dans ce cas, la valeur de l'intégrale.

Exercice 2.

Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale généralisée

$$\int_{0}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

est-elle convergente ? Donner, dans ce cas, la valeur de l'intégrale.

Solution de l'exercice 1 :
Considérons F, l'application définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$\begin{aligned} F : [1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{1}^{x} \frac{dt}{t^\alpha}. \end{aligned}$$

— Cas où $\alpha = 1$.

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad F(x) = \Big[\ln(t)\Big]_1^x = \ln x.$$

L'intégrale est divergente.

— Cas où $\alpha \neq 1$.

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$$

L'intégrale est convergente si et seulement si

$$\alpha > 1$$

Dans ce cas,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Solution de l'exercice 2 :
Considérons G, l'application définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par

$$\begin{aligned} G :]0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{x}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}. \end{aligned}$$

— Cas où $\alpha = 1$.

$$\forall x \in]0, 1], \quad \int_{x}^{1} \frac{dt}{t} = [\ln t]_x^1 = -\ln x$$

Puisque

$$\lim_{x \to 0} (-\ln x) = +\infty$$

l'intégrale est divergente.

— Cas où $\alpha \neq 1$.

$$\forall x \in]0,1], \quad \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right).$$

L'intégrale est convergente si et seulement si

$$\alpha < 1.$$

Dans ce cas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2. Intégrales de référence

Dans les deux exercices précédents, on a démontré des intégrales généralisées de référence dites de Riemann. Il y a d'autres intégrales de référence qui généralise celles de Riemann dites de Bertrand :

Proposition 1.

— **Intégrales de Riemann**

Ce sont les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Résultat :
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt \text{ converge} \iff \alpha < 1$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

— **Intégrales de Bertrand**

Ce sont les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^\alpha|\ln t|^\beta}dt$ et $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln t^\beta}dt$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Résultat :
$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^\alpha|\ln t|^\beta}dt \text{ converge} \iff (\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$
$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln t^\beta}dt \text{ converge} \iff (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Remarque : En général, si la fonction en question est continue par morceau sur l'intervalle voulu, on aurai les mêmes résultats si on change la borne qui ne présente pas de singularité par une autre qui ne présente pas de singularité.

3. Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert]a,b[

Proposition-définition 1.

Soient]a, b[un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $c_0 \in]a,b[$ tel que les intégrales

$$\int_a^{c_0} f(t)dt \text{ et } \int_{c_0}^b f(t)dt$$

soient convergentes. Alors, pour tout réel $c \in]a,b[$, les intégrales

$$\int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt$$

convergent. On dit alors que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{c_0} f(t)dt + \int_{c_0}^b f(t)dt$$

Cette valeur est indépendante du réel c_0 choisi dans l'intervalle $]a,b[$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Remarque : si l'une au moins des deux intégrales impropres $\int_{\to a}^{c} f(t)dt$ et $\int_c^{\to b} f(t)dt$ diverge, alors $\int_{\to a}^{\to b} f(t)dt$ diverge.

4. Intégrales absolument convergentes, semi-convergentes

Définition 2.

— L'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est dite absolument convergente si et seulement si $\int_a^{\to b} |f(t)|dt$ est convergente.

— L'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est dite semi-convergente si et seulement si $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est convergente et $\int_a^{\to b} |f(t)|dt$ divergente.

5. Propriétés

Propriétés 1.

— Soient $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ deux intégrales impropres convergentes sur $]a,b]$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les intégrales impropres

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \lambda f(t)dt$$

sont alors convergentes et vérifient :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$
$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

— Propriétés analogues sur les autres types d'intervalles non fermés.

Proposition 2.

Toute intégrale absolument convergente est convergente :

$$\int_a^b |f(t)|dt \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge.}$$

Attention : *il n'y a pas équivalence, la réciproque n'est pas vraie.*

II). Critères de convergence

Toutes les propriétés indiquées dans cette section le sont pour des intégrales généralisées définies sur un intervalle $[a, b[$. On obtient des propriétés identiques pour des intégrales généralisées définies sur un intervalle $]a, b]$.

Attention : *La plupart des critères listés ici ne sont plus valable si les fonctions ne sont pas positives.*

Proposition 3.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$ **positive**. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement *si*

$$\exists M \geq 0, \forall x \in [a, b[, \quad \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

1. Majoration (Pour les fonctions positives)

Proposition 4.

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < b$ et $f, g \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$ positives telles que, pour tout $x \in [a, b[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$
On a :

— Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

— Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Ce critère s'adapte aux autres types d'intervalles non fermés.

2. Équivalence (Pour les fonctions positives)

Proposition 5.

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < b$ et $f, g \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$ **positives**.
Si

$$f(x) \sim g(x) \text{ en } b,$$

les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature : Si l'une converge, l'autre converge ; si l'une diverge, l'autre diverge.

Ce critère s'adapte aux autres types d'intervalles non fermés.

3. Domination

Proposition 6.

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < b$ et $f, g \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$ avec g **positive**.
Si $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

— si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

— si $\lambda \neq 0$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

4. Multiplication par une fonction puissance

a) En une valeur finie

Proposition 7.

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a < b$ et $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$.

— S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 1$ tel que $\lim_{x \to b^-}(x-b)^\alpha f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

— S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$ tel que $\lim_{x \to b^-}(x-b)^\alpha f(x) \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$, alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Remarques : Ce critère s'applique en particulier lorsque $a = 0$.

b) En $+\infty$

Proposition 8.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{R})$.

— S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ tel que $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.

— S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq 1$ tel que $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Remarque : On peut déduire du dernier point une condition nécessaire de convergence des intégrale généralisée sur $]a, +\infty[$:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$$

III). Techniques de calcule

On a vu dans la première section du chapitre que le calcule d'une intégrale généralisée repose en partie sur les même techniques de calcule d'intégration usuelle. On rappel ici ces techniques adaptées à notre contexte.

1. En utilisant une primitive

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < b$ et $f \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{R})$
Si f admet une primitive F définie sur $]a, b[$ telle que

$$\lim_{x \to a^+} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b^-} F(x)$$

existent dans $\mathbb{R}$, alors $\int_{\to a}^{\to b} f(t)dt$ converge et l'on a

$$: \int_{\to a}^{\to b} f(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

2. Avec un changement de variable

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < b$ et $f \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{R})$ et soit φ une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$ telle que φ et φ^{-1} soient de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\int_{\to a}^{\to b} f(t)dt$$

converge si et seulement si

$$\int_{\to\varphi(\alpha^+)}^{\to\varphi(\beta^-)} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt$$

converge et en cas de convergence, ces deux intégrales impropres sont égales.

3. Avec une intégration par parties

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < b$ et $u, v \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{R})$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ telles que $\lim_{x\to a^+} u(x)v(x)$ et $\lim_{x\to b^-} u(x)v(x)$ existent dans $\mathbb{R}$.

Si l'une des intégrales impropres $\int_{\to a}^{\to b} u'(x)v(x)dx$ ou $\int_{\to a}^{\to b} u(x)v'(x)dx$ est convergente, l'autre l'est également et on a :

$$\int_{\to a}^{\to b} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_{a^-}^{b^+} - \int_{\to a}^{\to b} u(x)v'(x)dx,$$

avec

$$[u(x)v(x)]_{a^-}^{b^+} = \lim_{x\to b^-} u(x)v(x) - \lim_{x\to a^+} u(x)v(x).$$

FEUILLE D'EXERCICES II

L2 ANALYSE| INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Rappel sur l'intégration

Tableau des primitives standards

Fonction	Primitive
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$f'(x)f(x)^n$	$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}$
$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	$\text{cotan}(x)$

Fonction	Primitive
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$f'(x)g'(f(x))$	$g \circ f(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$

Fonction	Primitive
e^x	e^x
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

Exercice 2.1

Trouver l'ensemble de définition et une primitive des fonctions suivantes

1. $h_1(x) = \cos(x)\sin(x)$;
2. $h_2(x) = (2x-3)\left(2x^2-6x+4\right)$;
3. $h_3(x) = \frac{\ln(x)}{x}$;
4. $h_4(x) = \frac{x}{1+x^2}$;
5. $h_5(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$;
6. $h_6(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$;
7. $h_7(x) = \frac{3}{\sqrt{5x+2}}$;
8. $h_8(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$;
9. $h_9(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$;
10. $h_{10}(x) = x^3\sqrt{3+x^4}$.

Exercice 2.2

1. Rappeler la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.
2. Pour $a, b, c > 0$, calculer $I_{a,b,c} = \int_0^c \frac{1}{a+bx^2}dx$.
3. Calculer $J = \int_0^2 \frac{1}{3x^2+2x+1}dx$.

Exercice 2.3

Le but est de calculer $\int_0^1 \frac{2}{1+\tan(u)}du$.

1. Effectuer le changement de variables $v = \tan(u)$.
2. Chercher trois réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{(1+v)(1+v^2)} = \frac{a}{1+v} + \frac{bv+c}{1+v^2}.$$

3. Conclure.

Exercice 2.4

Calculer

$$I_1 = \int_1^t x^2\ln(x)dx; \quad I_2 = \int_0^t u\sin(u)du; \quad I_3 = \int_0^{13} xe^x dx.$$

Intégrales généralisées

Exercice 2.5

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ converge-t-elle ?

Exercice 2.6

Déterminer à l'aide de la définition la nature des intégrales suivantes et calculer celles qui convergent :

i) $I = \int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2-1}dx$; j) $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$; k) $K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$;

l) $L = \int_0^1 \ln x dx$; m) $M = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx$; n) $N = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x|\ln(x)|^\beta}dx \quad (\beta \in \mathbb{R})$;

o) $O = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$; p) $P = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$; q) $Q = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx$;

r) $R = \int_0^{+\infty} \exp(-2x)dx$.

Exercice 2.7

En utilisant les critères vus en cours, déterminer la nature des intégrales ci-dessous : (on ne cherchera pas à les calculer)

i) $I = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}dx$ j) $J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln}{x^2+1}dx$ k) $K = \int_0^{+\infty} \ln x \exp(-x)dx$

l) $L = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ m) $M = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx$ n) $N = \int_0^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2}dx$

o) $O = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{1+x^2}dx$ p) $P = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{(1-x)^3}}dx$ q) $Q = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\exp x)-1}dx$

r) $R = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(\ln x^2\right)\right)dx$ s) $S = \int_0^{+\infty} \exp(-x{\cdot}\arctan x)dx$ t) $T = \int_0^{+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)dx$

Exercice 2.8

1. Calculer en fonction du réel α l'intégrale $\int_x^1 t^\alpha \ln t dt$.
2. En déduire la nature de $I = \int_0^1 t^\alpha \ln t dt$ en fonction de α et sa valeur dans les cas de convergence.
3. Effectuer le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans $\int_1^x \frac{\ln}{t^\alpha}dt$.
4. En déduire la nature de $J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln}{t^\alpha}dt$ en fonction de α et sa valeur dans les cas de convergence.
5. (Question indépendante des précédentes).
   a) Déterminer la nature de $K = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)^2}dt$.
   b) Calculer cette intégrale.