Dualité et algèbre bilinéaire

Romain Gicquaud

Année universitaire 2019–2020

Table des matières

Chapitre 1

Dualité

Sommaire

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou plus généralement un corps commutatif) de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, sauf mention du contraire. On rappelle que $\mathbb{K}$ lui-même est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 ; sa base canonique est (1).

δ désigne le symbole de Kronecker (Léopold Kronecker 1823–1891) :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de E, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

1.1 Formes linéaires

Définition 1. 1. Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$. Usuellement une forme linéaire est désignée par une lettre grecque : φ (phi), ψ (psi), θ (theta)...

2. L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle *l'espace dual* de E (ou plus simplement *le dual* de E). On le note E^*.

En vertu de la définition, une forme linéaire φ est une application de E vers $\mathbb{K}$ qui satisfait

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(u + \lambda v) = \varphi(u) + \lambda \varphi(v).$$

Proposition 2. *E^* est un espace vectoriel pour l'addition des applications et la multiplication par un scalaire. Si E est de dimension finie, E^* l'est aussi et $\dim(E^*) = \dim(E)$. Et donc, dans ce cas, E^* est isomorphe à E.*

Nous verrons par la suite (section 1.3) comment trouver des bases de E^* si E est de dimension finie. Remarquons également que, même si E et E^* sont isomorphes, il n'existe pas de manière canonique (c'est-à-dire indépendante de tout choix) de construire un isomorphisme entre E et E^*, ceci nécessite d'avoir à disposition d'autres objets (voir le chapitre 2). Le cas où E est de dimension infinie dépasse le cadre de ce cours.

Preuve de la proposition 2. On a que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ donc E^* est muni d'une structure d'espace vectoriel. De plus, si E est de dimension finie,

$$\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E)\dim(\mathbb{K}) = \dim(E).$$

□

Pour montrer que E^* est un espace vectoriel, on aurait pu également voir que si $\varphi, \psi \in E^*$ sont deux formes linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, l'application $\varphi + \lambda\psi$ définie par

$$\forall u \in E,\ (\varphi + \lambda\psi)(u) = \varphi(u) + \lambda\psi(u)$$

est une forme linéaire. L'élément neutre de E^* est *la forme linéaire nulle* 0_{E^*} :

$$\forall u \in E,\ 0_{E^*}(u) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Proposition 3. *Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Alors φ est surjective et* $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = n - 1$.

Démonstration. Donnons deux preuves de la surjectivité de φ :

1. $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ donc $\operatorname{rg}\varphi = \dim \operatorname{Im}\varphi = 0$ ou 1. Si $\operatorname{rg}\varphi = 0$, $\operatorname{Im}\varphi = \{0_{\mathbb{K}}\}$ donc $\forall u \in E, \varphi(u) = 0$, autrement dit $\varphi = 0_{E^*}$, ce que nous avons exclu dans les hypothèses de la proposition. Donc $\operatorname{rg}\varphi = 1$ et $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}$, c'est-à-dire φ surjective.

2. Puisque φ est non-nulle, il existe un vecteur $u \in E$ tel que $x := \varphi(u) \neq 0$. Soit maintenant $y \in \mathbb{K}$, on cherche un vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(v) = y$. Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, si $v = \lambda u$

$$\varphi(v) = \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) = \lambda x.$$

En choisissant $\lambda = y/x$ (cette opération est permise car $x \neq 0$), on a donc

$$\varphi\left(\frac{y}{x}u\right) = \frac{y}{x}\varphi(u) = \frac{y}{x}x = y.$$

Ce qui montre que pour tout $y \in \mathbb{K}$, il existe $v \in E$ tel que $y = \varphi(v)$: φ est surjective.

Pour démontrer le second point de la proposition, utilisons le théorème du rang appliqué à φ :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(\varphi) + \operatorname{rg}\varphi.$$

Nous avons $\dim E = n$, par définition, et nous avons vu, dans le premier point que $\operatorname{rg}\varphi = 1$. Ceci montre que $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = n - 1$. □

Donnons maintenant quelques exemples de références :

- Si E est un espace vectoriel quelconque de dimension n et si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on a, par définition

$$\forall u \in E,\ \exists!(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i.$$

Soit $\varphi \in E^*$. Comme φ est linéaire, on a

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi(e_i).$$

Ainsi φ est parfaitement déterminée par le n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}^n$

$$\varphi(\mathcal{B}) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)),$$

l'image par φ de $\mathcal{B}$ qui n'est autre que la matrice, de format $(1, n)$, de φ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

c'ést l'écriture matricielle du scalaire $\varphi(u)$.

Dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, \ldots, 1), \end{cases}$$

on a que $\varphi \in E^*$ si et seulement s'il existe n scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\varphi((x_1, \dots, x_n)) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

On a alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\alpha_i = \varphi(e_i)$: les α_i sont déterminés de manière unique par φ. Par exemple,

$$\varphi = 0_{E^*} \Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0).$$

- Si $E = M_n(\mathbb{K})$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\dim(E) = n^2$. La base canonique de E est la base

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}),$$

formée des matrices élémentaires E_{kl} définies par $E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, avec δ le symbole de Kronecker (E_{kl} est la matrice carrée de taille n ayant des zéros partout sauf un 1 à l'intersection de la k-ième ligne et de la l-ième colonne). L'application *trace*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \mapsto \operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$. En effet, pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B).$$

- Soit $E = \mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \leqslant n\}$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. La base canonique de E est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$, donc $\dim(E) = \operatorname{Card}(\mathcal{B}) = n + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, l'application $\delta_x : P \mapsto P(x)$ est une forme linéaire sur E appelée *évaluation en x*. Plus généralement, si $x \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$, on peut définir une forme linéaire sur E par

$$\psi_{x,k} : P \mapsto P^{(k)}(x) \tag{1.1.1}$$

(évaluation de la dérivée k-ième de P en x). Remarquons que si $k \geqslant n + 1$, $\psi_{x,k} = 0_{E^*}$.

- Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec a et b deux réels, $a < b$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie. L'application

$$I : f \mapsto \int_a^b f(t)dt$$

est une forme linéaire sur E grâce à la linéarité de l'intégrale. Et, comme précédemment, si $x \in [a, b]$, l'application δ_x suivante est une forme linéaire : $\delta_x : f \mapsto f(x)$.

Donnons maintenant un critère pour vérifier qu'une famille de formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*.

Proposition 4. *Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de n formes linéaires sur E et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors*

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ est une base de } E^* \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varphi_1(e_1) & \varphi_1(e_2) & \cdots & \varphi_1(e_n) \\ \varphi_2(e_1) & \varphi_2(e_2) & \cdots & \varphi_2(e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(e_1) & \varphi_n(e_2) & \cdots & \varphi_n(e_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Démonstration. Nous savons que $\dim(E^*) = n$ donc si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre, elle sera libre maximale donc une base de E. Nous avons

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \text{ liée}\\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\smallsetminus\{(0,\dots,0)\},\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_n\varphi_n=0\\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\smallsetminus\{(0,\dots,0)\},\forall i\in\{1,\dots,n\},(\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_n\varphi_n)(e_i)=0\\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\smallsetminus\{(0,\dots,0)\},\forall i\in\{1,\dots,n\},\lambda_1\varphi_1(e_i)+\dots+\lambda_n\varphi_n(e_i)=0\\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\smallsetminus\{(0,\dots,0)\},\underbrace{\begin{pmatrix}\varphi_1(e_1)&\varphi_2(e_1)&\cdots&\varphi_n(e_1)\\ \varphi_1(e_2)&\varphi_2(e_2)&\cdots&\varphi_n(e_2)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \varphi_1(e_n)&\varphi_2(e_n)&\cdots&\varphi_n(e_n)\end{pmatrix}}_{=M}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(M)\neq\{0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}\}\\
&\Leftrightarrow \det(M)=0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat (la matrice donnée dans la proposition est la transposée de M et on sait que $\det(M)=\det({}^tM)$. □

1.2 Hyperplans

Définition 5. On appelle hyperplan de E le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E :

$$H \text{ hyperplan de E} \Leftrightarrow \exists\varphi\in E^*\smallsetminus\{0_{E^*}\}, H=\mathrm{Ker}\,(\varphi).$$

Par conséquent, un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de de E de dimension $n-1$ si $\dim E=n$ (voir la proposition 3).

Théorème 6. *Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) H est un hyperplan de E,

ii) H est un sous-espace vectoriel strict de E et $\forall u\in E\smallsetminus H$, $E=H\oplus\mathbb{K}u$,

iii) $\dim H=n-1$.

Démonstration. • $i\Rightarrow iii$: Si H est un hyperplan, soit $\varphi\in E^*$ telle que $H=\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. On a vu (voir proposition 3) que $\dim(H)=\dim\mathrm{Ker}\,(\varphi)=n-1$.

• $iii\Rightarrow ii$: On a $\dim H=n-1<\dim E$ donc H est un sous-espace vectoriel strict de E.

Soit $u\in E\smallsetminus H$. Posons $F=\mathbb{K}u$. Si $v\in F\cap H$, $v\neq 0$, on a $u=\lambda v$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{K}^*$ et, comme $v\in H$, $u=\lambda^{-1}v\in H$, ce qui contredit le choix de u. Donc $F\cap H=\{0_E\}$. Par ailleurs, on sait

$$\dim(F+H)=\dim(F)+\dim(H)-\dim(F\cap H)=1+(n-1)-0=n$$

donc $F+H=E$ et, comme $F\cap H=\{0_E\}$, on a $F\oplus H=E$, ce qui est ii.

• $ii\Rightarrow i$: Soit $u\in E\smallsetminus H$. Soit φ l'application de E dans $\mathbb{K}$ définie de la manière suivante : Pour tout $v\in E$, on peut écrire de manière unique $v=v_0+v_1$ avec $v_0\in H$ et $v_1=\in\mathbb{K}u$ donc (de manière unique là encore) $v_1=\lambda_v u$. On pose alors $\varphi(v):=\lambda_v$. Montrons que φ est linéaire. Soient $v,w\in E$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, notons

$$\begin{cases} v=v_0+\lambda_v u,\\ w=w_0+\lambda_w u\end{cases}$$

leur décomposition dans la somme directe $E=H\oplus\mathbb{K}u$ de sorte que

$$\varphi(v)=\lambda_v,\varphi(w)=\lambda_w.$$

On a alors que l'égalité

$$v+\alpha w=\underbrace{(v_0+\alpha w_0)}_{\in H}+\underbrace{(\lambda_v+\alpha\lambda_w)u}_{\in\mathbb{K}u}$$

est la décomposition de $v+\alpha w$ dans la somme directe et, selon la définition de φ,

$$\varphi(v+\alpha w)=\lambda_v+\alpha\lambda_w=\varphi(v)+\alpha\varphi(w).$$

Ce qui montre que φ est une forme linéaire. Reste à voir maintenant que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = H$. Or, si $v \in H$, on a que $v = v + 0\ u$ est la décomposition de v dans la somme directe $E = H \oplus \mathbb{K}u$. Donc $\varphi(v) = \lambda_v = 0$ et $v \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, ce qui montre que $H \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) \geqslant \dim(H) = n-1$. Or la décomposition de u dans la somme directe est $u = 0 + 1\ u$ d'où on tire $\varphi(u) = 1$. Donc $\varphi \neq 0_{E^*}$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) = n-1 = \dim H$. Comme $H \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, ceci montre que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, autrement dit H est un hyperplan de E.

□

Théorème 7. *Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E. On a*

$$(\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi)) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\varphi).$$

Démonstration. Si $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a trivialement que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi)$. Supposons donc que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi)$. Distinguons deux cas :

- Si $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi) = E$, on a $\varphi = \psi = 0_{E^*}$ et les deux formes sont proportionnelles l'une à l'autre (prendre par exemple $\lambda = 1$).
- Si $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi) = H$ avec H un hyperplan de E. Soit $u \in E \setminus H$. On a alors $\varphi(u) \neq 0$ et $\psi(u) \neq 0$. Posons
$$\lambda = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \in \mathbb{K}^*.$$
Montrons que $\psi = \lambda\varphi$. Soit $v \in E$. Notons, comme dans la preuve du théorème précédent $v = v_0 + \alpha u$ la décomposition de v dans la somme directe $E = H \oplus \mathbb{K}u$ ($v_0 \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$). On a alors
$$\begin{aligned}
\psi(v) &= \psi(v_0) + \alpha\psi(u) && \text{(linéarité de } \psi)\\
&= 0 + \alpha\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}\varphi(u) && (v_0 \in \mathrm{Ker}\,(\psi))\\
&= \lambda\varphi(v_0) + \alpha\lambda\varphi(u) && (v_0 \in \mathrm{Ker}\,(\varphi))\\
&= \lambda(\varphi(v_0) + \alpha\varphi(u))\\
&= \lambda\varphi(v_0 + \alpha u)\\
&= \lambda\varphi(v).
\end{aligned}$$
Nous avons donc montré que pour tout $v \in E$ on a $\psi(v) = \lambda\varphi(v)$, autrement dit $\psi = \lambda\varphi$.

□

Remarquons que la preuve nous montre qu'une forme linéaire φ (non nulle) est définie connaissant son noyau et la valeur qu'elle prend sur un vecteur $u \in E \setminus \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Donnons maintenant quelques exemples :

- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. C'est le plan vectoriel ($\dim H = 3 - 1 = 2$) d'équation $x - y + z = 0$ puisque $\varphi(x,y,z) = x - y + z$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On a
$$H = \{(y - z, y, z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$$
donc une base de H est donnée par $\mathcal{G} = \{(1,1,0), (-1,0,1)\}$ (c'est une famille génératrice minimale car $\mathrm{Card}\,\mathcal{G} = 2 = \dim H$).

  Les vecteurs $u_1 = (2,-1,-3)$ et $u_2 = (1,1,1)$ appartiennent-ils à H ? Il suffit pour cela de calculer $\varphi(u_1)$ et $\varphi(u_2)$:
$$\begin{aligned}
\varphi(u_1) &= 2 - (-1) + (-3) = 0 \quad \text{donc } u_1 \in H,\\
\varphi(u_2) &= 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \quad \text{donc } u_2 \notin H.
\end{aligned}$$
Les supplémentaires de H sont les droites vectorielles $\mathbb{R}u_0$ avec $u_0 = (a,b,c) \notin H$, autrement dit tels que $a - b + c \neq 0$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons noté $\delta_a : P \mapsto P(a)$ la forme linéaire "évaluation en a". C'est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}_n[X]$ car $\delta_a(1) = 1$. Donc $H_a = \mathrm{Ker}\,\delta_a$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

  La famille $\mathcal{L} = (X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une famille de n vecteurs dans H_a linéairement indépendents (car échelonnés par leur degré). C'est une famille libre maximale de H_a donc une base de H_a.

Exercice. 1. Montrer qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel strict de E qui n'est inclus (strictement) dans aucun autre sous-espace vectoriel de E hormis E lui-même.

2. (difficile) Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

1.3 Bases duales

Dans toute cette section E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Théorème 8 (Base duale)**.** *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note e_i^* la forme linéaire sur E définie par*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \qquad \textit{(relations d'orthogonalité de Kronecker)},$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. e_i^* est appelé la ième forme (linéaire) coordonnée de la base $\mathcal{B}$. *On a*

1. *La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E appelée* base duale *de $\mathcal{B}$.*
2. *Pour tout $u \in E$,*
$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u)e_i. \tag{1.3.1}$$
3. *Pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$.*

Remarquons que le deuxième point justifie l'appellation "forme linéaire coordonnée" pour e_i^* car $e_i^*(u)$ est la coordonnée de u le long du vecteur e_i.

Démonstration. Nous avons défini les e_i^* sur une base de E, nous savons alors qu'il existe une et une seule manière de les définir sur E tout entier par linéarité. Montrons maintenant chacun des trois points.

- La famille des e_i^* est une famille libre. En effet, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont tels que
$$\lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^* = 0_{E^*},$$
on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $0 = \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_j^*\right)(e_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_j^*(e_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{ji} = \lambda_i$. Donc $\lambda_i = 0$ pour tout i, ce qui montre bien que la famille des e_i^* est libre. Comme elle est de rang maximal $n = \dim E^*$, c'est une base de E^*.
- Pour tout $u \in E$, notons $u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$ sa décomposition dans la base $\mathcal{B}$. On a
$$e_i^*(u) = e_i^*(u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n) = \sum_{j=1}^{n} u_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j \delta_{ij} = u_i,$$
ce qui montre que $u = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u)e_i$.
- Soit $\varphi \in E^*$. En utilisant la formule précédente, on a, pour tout $u \in E$,
$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(u)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u)\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*(u),$$
d'où on tire $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$.

□

Remarquons ici que pour établir les points 2 et 3, nous n'avons pas utilisé le fait que les e_i^* forment une base de E^*. La formule du point 3 montre que les e_i^* forment une famille génératrice de E^*.

Théorème 9 (Base antéduale)**.** *Soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de E telle que*

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \ \varphi_i(f_j) = \delta_{ij}.$$

Cette base est appelée antéduale *(ou* préduale*) de la base Φ.*

Démonstration. La principale difficulté de cette preuve, par rapport à la preuve de l'existence d'une base duale, est qu'on ne peut pas construire les éléments de E comme on construit une forme linéaire. Il faut donc procéder différemment. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. Nous cherchons des vecteurs $f_1, \dots f_n \in E$ que nous pouvons écrire

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} e_k$$

avec $P = (p_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est la base préduale de Φ si et seulement si, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a

$$\delta_{ij} = \varphi_i(f_j) = \varphi_i\left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} \varphi_i(e_k).$$

Soit A la matrice définie par

$$A = (a_{ki})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n, \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \quad a_{ki} = \varphi_i(e_k).$$

L'égalité $\delta_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{kj} \varphi_i(e_k)$ peut s'écrire matriciellement $I_n = PA$. Donc, si on montre que A est inversible, on aura $P = A^{-1}$, ce qui démontrera l'existence et l'unicité de la base antéduale. Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

un vecteur colonne tel que $AX = 0$. On a alors, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$0 = (AX)_k = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(e_k) x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i\right)(e_k).$$

La forme linéaire $\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i$ est nulle en chacun des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ et ces vecteurs forment une base de E, donc $\varphi = 0_{E^*}$:

$$0_{E^*} = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i.$$

Mais comme les φ_i forment une base de E^*, on en déduit que tous les x_i sont nuls, i.e. $X = 0$. Nous avons donc montré que le noyau de A est réduit à 0, donc A est inversible. □

Les deux théorèmes précédents montrent qu'il existe une bijection canonique entre les bases de E et celles de E^*. Donnons maintenant quelques exemples de calcul de base duale et préduale.

- Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, posons

  $$u_1 = e_1 + e_3, \quad u_2 = e_1 - e_2, \quad u_3 = e_2 - e_3.$$

  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$: en effet,

  $$\det{}_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

  Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$:

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminons maintenant la base duale $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*),$$

on doit résoudre $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Faisons le calcul pour u_1^*. Posons $u_1^* = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$. On veut

$$\begin{cases} 1 = u_1^*(u_1) \\ 0 = u_1^*(u_2) \\ 0 = u_1^*(u_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = ae_1^*(u_1) + be_2^*(u_1) + ce_3^*(u_1) \\ 0 = ae_1^*(u_2) + be_2^*(u_2) + ce_3^*(u_2) \\ 0 = ae_1^*(u_3) + be_2^*(u_3) + ce_3^*(u_3) \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & = & a & & + c \\ 0 & = & a & - b & \\ 0 & = & & b & - c \end{array} \right.$$

La solution de ce système est $a = b = c = \dfrac{1}{2}$. Donc $u_1^* = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)$. On trouve de même :

$$u_2^* = \frac{1}{2}(e_1^* - e_2^* - e_3^*), \quad u_3^* = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* - e_3^*).$$

Grâce à ce qui précède, nous pouvons déterminer P^{-1}, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$. Il faut pour cela connaître les coordonnées de e_1, e_2, e_3 dans $\mathcal{B}$. On utilise pour cela la formule (1.3.1) : $e_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i^*(e_j)u_i$. Donc

$$P^{-1} = (u_i^*(e_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarquez que $P^{-1} = {}^tQ$ où Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^*$ à $\mathcal{B}^*$ (Pourquoi ?).

- Dans $E = \mathbb{K}_n[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$, on a grâce à la formule de Taylor

$$\forall P \in E, \quad P = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} X^i \tag{1.3.2}$$

En posant $\forall P \in E,\ \varphi_i(P) := \dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}$, on a que $\varphi_i \in E^*$ (on a $\varphi_i = \psi_{0,i}$, voir (1.1.1)) et la formule (1.3.2) s'écrit

$$\forall P \in E,\ P = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P) X^i,$$

autrement dit, $\varphi_i(P)$ est la coordonnée le long de X^i dans la base $\mathcal{B}_0$:

$$(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ est la base duale de } \mathcal{B}_0.$$

En particulier, $\mathcal{B}_0$ est une base de E^* et on a $\forall \varphi \in E^*, \varphi = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \varphi(X^i)\varphi_i$.

- Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$, on considère les trois formes linéaires définies par

$$\varphi_0(P) = P(0),\ \varphi_1(P) = P(1), \varphi_2(P) = P(2),$$

c'est-à-dire les évaluations en 0, 1 et 2.

Montrons tout d'abord que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de E^*. On calcule pour cela

$$\det{}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_0(1) & \varphi_1(1) & \varphi_2(1) \\ \varphi_0(X) & \varphi_1(X) & \varphi_2(X) \\ \varphi_0(X^2) & \varphi_1(X^2) & \varphi_2(X^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0,$$

donc $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de E^*.

Trouvons maintenant la base antéduale de $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$. On cherche une famille (P_0, P_1, P_2) d'éléments de E telle que $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant 2$. Faisons le calcul pour P_0. Posons $P_0 = a + bX + cX^2$. On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \varphi_0(P_0) \\ 0 = \varphi_1(P_0) \\ 0 = \varphi_2(P_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 0 = a + b + c \\ 0 = a + 2b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{3}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc

$$P_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)}.$$

En procédant de même pour P_1 et P_2, on obtient

$$P_1 = 2X - X^2 = \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)}, \quad P_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

On a ici un exemple simple de *polynômes interpolateurs de Lagrange* pour pour les valeurs 0, 1 et 2. Finalement, déterminons les 3 réels a, b, c tels que

$$\forall P \in E, \int_0^2 P(t)dt = aP(0) + bP(1) + cP(2).$$

L'application $\varphi : P \mapsto \int_0^2 P(t)dt$ est une application linéaire sur E. Donc (formule (2)), on a

$$\varphi = \varphi(P_0)\varphi_0 + \varphi(P_1)\varphi_1 + \varphi(P_2)\varphi_2.$$

Il nous suffit donc de calculer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(P_0) &= \int_0^2 \left(1 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{3},\\
\varphi(P_1) &= \int_0^2 \left(2t - t^2\right) dt = \frac{4}{3},\\
\varphi(P_2) &= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

On a donc $\varphi = \frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{4}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2$, ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\forall P \in E, \int_0^2 P(t)dt = \frac{1}{3}P(0) + \frac{4}{3}P(1) + \frac{1}{3}P(2) \qquad \text{(formule des trois niveaux).}$$

La proposition suivante permet d'éviter de vérifier qu'une famille $\mathcal{B}$ de E (resp. $\mathcal{B}^*$ de E^*) est une base :

Proposition 10. *Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une famille d'élements de E et $[\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille d'élements de E^* tels que*

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \varphi_j(e_i) = \delta_{ij}.$$

Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*.

Démonstration. Comme chacune des deux familles contient $n = \dim(E)$ vecteurs, il suffit de montrer que ces familles sont libres. Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ n scalaires tels que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E.$$

On a alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi_i(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\\
&= \lambda_1 \varphi_i(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi_i(e_n)\\
&= \lambda_i.
\end{aligned}$$

Tous les λ_i sont donc nuls : $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E. Comme elle est libre maximale, c'est une base de E.

La preuve du fait que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* est similaire et laissée au lecteur. □

1.4 Polynôme interpolateur de Lagrange

Essayons de généraliser l'exemple précédent. On se donne n abscisses $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ (deux à deux distinctes) et autant d'ordonnées $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ (non nécessairement distinctes). On cherche un polynôme P tel que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$P(x_i) = y_i.$$

L'espace $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ étant un espace de dimension n, on s'attend à ce qu'il existe exactement un tel polynôme P. En effet, si on note $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$, on a

$$P(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_{n-1}x_i^{n-1}.$$

Les n équations $P(x_i) = y_i$ conduisent alors au système

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1}, \\ \quad \cdots \\ y_n = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} \end{cases}$$

Soit, sous forme matricielle,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{V_{x_1,\ldots,x_n}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La matrice du système $V_{x_1,\ldots,x_n}$ et appelée matrice de Vandermonde. Son d'éterminant est connu[1] :

$$\det(V_{x_1,\ldots,x_n}) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Elle est donc inversible si et seulement si tous les x_i sont deux à duex distincts. Le calcul de son inverse est cependant plus délicat.

Formalisons ce problème en termes de bases duales. Considérons les n formes linéaires $\varphi_i : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}$ définies par

$$\varphi_i(P) = P(x_i).$$

Cherchons des polynômes L_j tels que

$$\varphi_i(L_j) = \delta_{ij},\ i,j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{1.4.1}$$

En vertu de la proposition 10, nous aurons alors que la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est une base de $(\mathbb{K}_{n-1}[X])^*$ et que la famille $(L_1,\ldots,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Fixons $j \in \{1,\ldots,n\}$. les équations (1.4.1) avec $i \neq j$,

$$0 = \varphi_i(L_j) = L_j(x_i),$$

montrent que les x_i $(i \neq j)$ sont racines de L_j et donc que L_j est divisible par le produit des $(X - x_i)$:

$$\prod_{i\neq j}(X - x_i)|L_j.$$

Comme ce produit est exactement de degré $n-1$, on a que

$$L_j = \omega_j \prod_{i\neq j}(X - x_i)$$

avec ω_j une constante à déterminer. Celle-ci nous est donnée par la condition $\varphi_j(L_j) = 1$:

$$1 = \varphi_j(L_j) = L_j(x_j) = \omega_j \prod_{i\neq j}(x_j - x_i).$$

On a donc

$$\omega_j = \frac{1}{\prod_{i\neq j}(x_j - x_i)}$$

et

$$L_j = \frac{\prod_{i\neq j}(X - x_i)}{\prod_{i\neq j}(x_j - x_i)}.$$

La solution de notre problème initial est maintenant à portée de main. Le polynôme P que nous cherchons doit satisfaire les équations $\varphi_i(P) = y_i$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Or la solution est donnée par

$$P = y_1 L_1 + \cdots + y_n L_n = \sum_{j=1}^{n} y_1 \frac{\prod_{i\neq j}(X - x_i)}{\prod_{i\neq j}(x_j - x_i)}.$$

En effet, en utilisant les propriétés des bases duales, on obtient $\varphi_i(P) = y_i$. Ce polynôme est appelé *polynôme interpolateur de Lagrange*.

[1] Et c'est peut-être un exercice que vous avez dégà fait !

1.5 (*) Formes linéaires et sous-espaces vectoriels

Nous avons vu dans la section 1.2 le lien entre formes linéaires et hyperplans. Essayons de généraliser cette construction pour inclure tous les sous-espaces vectoriels de E.

Définition 11. 1. Soit A une partie de E. On définit

$$A^\perp := \{\varphi \in E^* | \forall a \in A,\ \varphi(a) = 0\},$$

autrement dit $A^\perp$ est l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur tous les éléments de A.

2. Soit B une partie de E^*. On définit de manière analogue l'ensemble des $u \in E$ sur lesquels tous les éléments de B s'annulent :

$$^\perp B := \{u \in E | \forall \varphi \in B,\ \varphi(u) = 0\}$$

Remarquons ici la notation que nous avons employée : $A^\perp$ est une partie de E^* alors que $^\perp B$ est une partie de E, la différence permet ici de savoir si l'on a affaire à un sous-espace de E ou de E^*.

Exemple. 1. On a $E^\perp = \{0_{E^*}\}$ et $\{0_E\}^\perp = E^*$. De même, $^\perp(E^*) = \{0_E\}$ et $^\perp\{0_{E^*}\} = E$.

2. Si $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E, on a $H^\perp = \mathbb{K}\varphi$, c'est le théorème 7.

Le principal résultat de cette section est contenu dans les deux théorèmes suivants :

Théorème 12. *1. Si A et A' sont deux parties de E avec $A \subset A'$, on a $(A')^\perp \subset A^\perp$ (l'application $A \mapsto A^\perp$ renverse l'inclusion).*

2. Si A est une partie de E, $A^\perp = (\operatorname{Vect}(A))^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* et $^\perp(A^\perp) = \operatorname{Vect}(A)$. En particulier, si A est un sous-espace vectoriel de E, on a $^\perp(A^\perp) = A$.

3. Si A est un sous-espace vectoriel de E,

$$n = \dim(A) + \dim(A^\perp).$$

Le deuxième point de ce théorème est important : Si A est un sous-espace vectoriel de E, connaître A est équivalent à connaître $A^\perp$ puisque l'un se déduit de l'autre. Les bases de $A^\perp$ (ou plus généralement les familles génératrices) forment des *systèmes d'équations* de A.

Démonstration du théorème 12. 1. Soit $\varphi \in (A')^\perp : \forall u \in A',\ \varphi(u) = 0$. En particulier, comme $A \subset A'$, on a $\forall u \in A,\ \varphi(u) = 0$, c'est-à-dire $\varphi \in A^\perp$. Ceci montre donc que $(A')^\perp \subset A^\perp$.

2. Soient $\varphi, \psi \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a, pour tout $a \in A$,

$$(\lambda\varphi + \psi)(a) = \lambda\varphi(a) + \psi(a) = \lambda \times 0 + 0 = 0,$$

ce qui montre que $\lambda\varphi + \psi \in A^\perp$ et donc que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^*. Par définition de $A^\perp$, si $a \in A$, on a

$$\forall \varphi \in A^\perp,\ \varphi(a) = 0,$$

ce qui montre que $a \in {}^\perp(A^\perp)$: $A \subset {}^\perp(A^\perp)$. Comme $^\perp(A^\perp)$ est un sous-espace vectoriel de E (voir théorème 13), nous avons $\operatorname{Vect}(A) \subset {}^\perp(A^\perp)$. Nous devons maintenant montrer l'inclusion réciproque : $^\perp(A^\perp) \subset \operatorname{Vect}(A)$. Nous allons montrer

$$\operatorname{Vect}(A)^c \subset \left({}^\perp(A^\perp)\right)^c.$$

Si $\operatorname{Vect}(A) = E$, il n'y a rien à faire. Sinon, soit $u \in \operatorname{Vect}(A)^c$. Nous devons montrer $u \notin {}^\perp(A^\perp)$, autrement dit

$$\exists \varphi \in A^\perp, \varphi(u) \neq 0$$

(c'est la négation de $\forall \varphi \in A^\perp, \varphi(u) = 0$). Nous cherchons donc une forme linéaire $\varphi \in A^\perp$ (nulle sur $\operatorname{Vect}(A)$) telle que $\varphi(u) \neq 0$. Soit $k = \dim(\operatorname{Vect}(A)) < n$. On se donne $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\operatorname{Vect}(A)$. Posons $e_{k+1} = u$ et complêtons la famille libre $(e_1, \dots, e_{k+1})$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Prenons la forme linéaire φ définie par

$$\varphi(e_i) = 0 \text{ si } i \neq k+1, \quad \varphi(e_{k+1}) = 1.$$

On a alors $e_1, \dots, e_k \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ donc $A = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$, ce qui montre $\varphi \in A^\perp$ et $\varphi(u) = \varphi(e_{k+1}) = 1 \neq 0$. Ceci achève la preuve de $x \notin {}^\perp(A^\perp)$.

3. Soit $k = \dim(A)$. Choisissons une base $(e_1, \dots, e_k)$ de A que nous complêtons en une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale. Posons $B := \mathrm{Vect}(e_1^*, \dots, e_k^*)$, de sorte que $\dim(B) = k = \dim(A)$. Si $\varphi \in B$, on peut écrire de manière unique

$$\varphi = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_k e_k^*.$$

Donc si $\varphi \in B \cap A^\perp$, on a $\varphi = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_k e_k^*$ et $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$. Donc

$$\lambda_1 = \varphi(e_1) = 0, \dots, \lambda_k = \varphi(e_k) = 0,$$

ce qui montre que $\varphi = 0_{E^*}$:

$$B \cap A^\perp = \{0_{E^*}\}.$$

Soit maintenant $\psi \in E^*$ quelconque. Il existe des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\psi = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*$. Posons

$$\psi_B = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_k e_k^*, \quad \psi_{A^\perp} = \alpha_{k+1} e_{k+1}^* + \dots + \alpha_n e_n^*.$$

On a clairement $\psi_B \in B$. De plus, on voit que $\psi_{A^\perp}(e_1) = \dots = \psi_{A^\perp}(e_k) = 0$ donc $A \subset \mathrm{Ker}\,(\psi_{A^\perp})$ et $\psi_{A^\perp} \in A^\perp$. Nous avons donc montré que $B + A^\perp = E^*$. Finalement

$$n = \dim(E^*) = \dim(B) + \dim(A^\perp) = \dim(A) + \dim(A^\perp).$$

□

Théorème 13. *1. Si B et B' sont deux parties de E^* avec $B \subset B'$, on a ${}^\perp(B') \subset {}^\perp B$ (l'application $B \mapsto {}^\perp B$ renverse l'inclusion).*

2. Si B est une partie de E^*, ${}^\perp B = {}^\perp(\mathrm{Vect}(B))$ est un sous-espace vectoriel de E et $({}^\perp B)^\perp = \mathrm{Vect}(B)$.

3. Si B est un sous-espace vectoriel de E^*,

$$n = \dim(B) + \dim({}^\perp B).$$

La preuve de ce second théorème est similaire à celle du premier. Nous la laissons donc en exercice. L'analogie entre ces deux théorèmes est assez remarquable et illustre la dualité (au sens usuel) entre E et E^*. Nous avons vu que E et E^* sont isomorphes, mais pas de manière naturelle. Cependant, nous avons le fait suivant :

Théorème 14. *On appelle* bidual *de E le dual de E^* (l'ensemble des formes linéaires sur E^*) noté E^{**}. Si $u \in E$, on définit une forme linéaire $\Theta_u : E^* \to \mathbb{K}$ par*

$$\Theta_u(\varphi) = \varphi(u).$$

On a donc $\Theta_u \in E^{**}$ et l'application $u \mapsto \Theta_u$ est linéaire. Si E est de dimension finie, cette application est un isomorphisme entre E et E^{**}.

Démonstration. Vérifions que Θ_u est linéaire. Si $\varphi, \psi \in E^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\Theta_u(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi)(u) = \lambda\varphi(u) + \psi(u) = \lambda\Theta_u(\varphi) + \Theta_u(\psi),$$

ce qui montre que Θ_u est une forme linéaire sur E^* : $\Theta_u \in E^{**}$. De plus, si $u, v \in E$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a, pour tout $\varphi \in E^*$,

$$\Theta_{\lambda u + v}(\varphi) = \varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v) = \lambda\Theta_u(\varphi) + \Theta_v(\varphi).$$

Remarquons qu'on a utilisé ici le fait que φ est linéaire (!). Nous avons donc montré (φ étant quelconque) que $\Theta_{\lambda u+v} = \lambda\Theta_u + \Theta_v$, ce qui montre que $\Theta : u \mapsto \Theta_u$ est linéaire. Ensuite, on a $\dim E^{**} = \dim(E^*) = \dim(E)$, donc pour montrer que Θ est un isomorphisme, il suffit de montrer que Θ est injective. Or, si $\Theta_u = 0$ pour un certain $u \in E$, on a $\forall \varphi \in E^*, 0 = \Theta_u(\varphi) = \varphi(u)$, ce qui impose $u = 0$ (on consultera ici la preuve du théorème 12 où l'on montre que pour tout sous-espace A et tout $u \neq 0$ il existe une forme linéaire φ nulle sur A et telle que $\varphi(u) \neq 0$, il suffit ici de prendre $A = \{0\}$). Θ est donc un isomorphisme. □

1.6 (*) Formes linéaires et applications

Dans cette section, donnons-nous E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 15. Soit $\Phi \in L(E,F)$ une application linéaire. On appelle *application transposée* l'application linéaire ${}^t\Phi : F^* \to E^*$ définie par ${}^t\Phi(\varphi) = \varphi \circ \Phi$ pour tout $\varphi \in F^*$.

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que ${}^t\Phi$ est bien définie et linéaire.

Théorème 16. *Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) une base de E (resp. de F). Notons $\mathcal{B}^*$ (resp. $\mathcal{C}^*$) sa base duale. On a alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}({}^t\Phi) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi)\right).$$

Autrement dit, la matrice de l'application transposée (dans les bases duales) est la transposée de l'application elle-même.

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$ et $m = \dim(F)$. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ les matrices de Φ et ${}^t\Phi$:

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ \Phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\},\ {}^t\Phi(f_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^*.$$

On a $\sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^* = {}^t\Phi(f_i^*) = f_i^* \circ \Phi$. La formule (1.3.1) peut s'écrire (en enlevant la référence à $u \in E$) $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(\cdot) e_j$, d'où

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^* = f_i^* \circ \Phi \circ \mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{n} e_i^*(\cdot) f_i^*(\Phi(e_j)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_i^*(\cdot).$$

En identifiant, on trouve donc $b_{ji} = a_{ij}$ pour toute paire (i,j), ce qui montre $B = {}^tA$. □

1.7 Exercices

Exercice 1.1. Dans $M_n(\mathbb{K})$, E_{ij} désigne la matrice, dite élémentaire, dont les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1 : $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant n}}$.

1. Justifier que $\mathcal{B}_0 = (E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$ (c'est sa base canonique). En déduire $\dim(M_n(\mathbb{K}))$.
2. On note $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (l'espace des matrices colonnes de longueur n). Prouver que, pour toute paire (i,j) d'entiers entre 1 et n, on a ${}^tE_i.E_j = \delta_{ij}$, et $E_i.{}^tE_j = E_{ij}$.
3. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tous i,j,k,l entiers entre 1 et n, on a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
4. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont on note $L_1,\dots,L_n$ les lignes et $C_1,\dots,C_n$ les colonnes. Décrire les matrices $E_{ij}A$ et AE_{ij}. En déduire le centre de $M_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{C} := \{A \in M_n(\mathbb{K}),\ \forall M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

Exercice 1.2. 1. Définir, à l'aide de quantificateurs, les propriétés suivantes de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$:

- A est triangulaire supérieure (resp. inférieure),
- A est diagonale,
- A est scalaire,
- A est symétrique (resp. antisymétrique).

2. Soit $D \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que D soit inversible et déterminer alors son inverse.
3. On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $M_n(\mathbb{K})$. Après avoir rappelé les propriétés de la transposition, montrer que S_n et A_n sont deux sous-espaces supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$.
4. Donner une base de S_n et de A_n lorsque $n = 2$ ou 3 puis généraliser. Donner la dimension de S_n et A_n.

Exercice 1.3. Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A le scalaire $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Prouver que l'application $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle sur $M_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que $H = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(A) = 0\}$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ et en donner une base lorsque $n = 2$.
3. Prouver que pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$, et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. Prouver que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}((AB)^p) = \mathrm{tr}((BA)^p)$.
5. A-t-on $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$ pour tout couple de matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$?
6. Prouver que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}({}^tA.A) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $A = O_n$.

Exercice 1.4. Dans $E = \mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, on considère $F = \mathrm{Vect}(u, v, w, t)$ où

$$u = (1,0,2,0,3), \quad v = (2,0,1,0,-1), \quad w = (-1,0,1,0,2), \quad t = (-1,0,4,0,9).$$

Par la méthode d'échelonnement, déterminer le rang de la famille (u, v, w, t), une base de F, sa dimension, l'un de ses supplémentaires dans E et une forme linéaire $\varphi \in (\mathbb{R}^5)^*$ telle que $F = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Exercice 1.5. Dans $E = \mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3z + t = 5x + 4y\}$. Justifier que F est un hyperplan de E, en déduire sa dimension, puis en donner une base, toutes ses équations et tous ses supplémentaires dans E.

Exercice 1.6. Reprendre l'exercice précédent avec $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \{P \in E,\ P(1) + P'(1) = 0\}$.

Exercice 1.7. Dans E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, on considère deux vecteurs distincts u, v. Construire une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. (On pourra compléter $e_1 = u - v$ en une base de E).

Exercice 1.8. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, on considère

$$u_1 = e_2 + e_3, \quad u_2 = e_2 - e_3, \quad u_3 = e_1 + e_2 - 2e_3.$$

1. Justifier que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E et déterminer sa base duale. En déduire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Justifier que F est un hyperplan de E et déterminer l'une de ses équations.
3. Déterminer un système d'équations de $G = \mathrm{Vect}(u_3)$.

Exercice 1.9. Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les cinq formes linéaires suivantes :

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P'(0), \quad \varphi_3(P) = P(1), \quad \varphi_4(P) = P'(1), \quad \psi(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

1. Prouver que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* et déterminer sa base préduale (H_1, H_2, H_3, H_4).
2. Déterminer les réels a, b, c, d tels que $\psi = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 + d\varphi_4$.

Exercice 1.10. Dans $E = \mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique, on considère l'ensemble F_1 des vecteurs (x, y, z, t, u) satisfaisant

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0, \\ x + y + z + t + u = 0, \\ 5x + 4y + 3z + 2t + u = 0. \end{cases}$$

1. Justifier que F_1 est un sous-espace vectoriel de E et que $2 \leqslant \dim(F_1) \leqslant 4$.
2. Les vecteurs $u = (6, -9, 1, 1, 1)$ et $v = (2, -1, 1, -2, 1)$ appartiennent-ils à F_1 ?
3. Déterminer une base de F_1 et en déduire sa dimension.
4. Déterminer un supplémentaire G_1 de F_1 dans E puis en donner un système d'équations.
5. On pose $F_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Déterminer $F_1 \cap F_2$.

Exercices plus difficiles :

Exercice 1.11. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

1. $\mathbb{R}^{n-1}$ est-il un hyperplan de $\mathbb{R}^n$? Donner la forme générale des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. En déduire une caractérisation de ses hyperplans.
2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $H_1 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$, $H_3 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = 1\}$. H_1, H_2 et H_3 sont-ils des hyperplans de $\mathbb{R}_n[X]$? Donner deux supplémentaires distincts de H_1 et de H_2.

Exercice 1.12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient H_1, H_2 deux hyperplans de E. Discuter la dimension de $H_1 \cap H_2$. Plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel de E, discuter la dimension de $F \cap H_1$.
2. Soient H_1, H_2 et H_3 trois hyperplans de E. On se donne $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ trois formes linéaires telles que $H_i = \operatorname{Ker} \varphi_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Discuter suivant le rang r de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Interpréter géométriquement les résultats lorsque $n = 3$.
3. Si $H_1, H_2, \ldots, H_p$ sont p hyperplans de E, prouver que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p) \geqslant n - p$.
4. Soient H un hyperplan et u un vecteur de $E \setminus H$. Montrer qu'on peut construire une base de E contenant u et aucun vecteur de H.

Exercice 1.13. On se propose de prouver que pour toute forme linéaire φ sur $M_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice A telle que

$$\forall X \in M_n(\mathbb{K}),\ \varphi(X) = \operatorname{tr}(AX).$$

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Justifier que l'application φ_A de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ définie par $\varphi_A(X) = \operatorname{tr}(AX)$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.
2. On note Φ l'application de $M_n(\mathbb{K})$ dans son dual définie par $\Phi(A) = \varphi_A$. Montrer que Φ est linéaire.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{O_n\}$ (on calculera pour cela $\varphi_A(E_{ij})$).
4. En déduire que Φ est un isomorphisme et conclure.