UNIVERSITÉ DE TOURS– L2– GÉOMÉTRIE 2020-2021

Feuille 1

Exercice 1
a) Résoudre le système suivant (par élimination de Gauss puis par la méthode de Cramer) :

$$\begin{cases} x+2y &= 3 \\ 3x+4y &= 5 \end{cases}$$

b) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. dont la matrice $A_{\mathscr{B}}$ dans une base $\mathscr{B}$, est de déterminant non nul.
Montrer que la matrice de f dans n'importe quelle base de $\mathbb{R}^2$ est de déterminant non nul.
c) Montrer que f est bijective.
d) Montrer que l'image d'une droite vectorielle par f est encore une droite vectorielle.

Exercice 2
On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\{\vec{i},\vec{j}\}$; soit $\mathscr{B}' := \{\vec{e}_1 = 2\vec{i}+\vec{j}, \vec{e}_2 = 2\vec{i}+3\vec{j}\}$
a) Représenter graphiquement $\mathscr{B}'$ et montrer que $\mathscr{B}'$ est une base.
b) Soit $\vec{v}_1 = \vec{i}+\vec{j}$; trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\vec{v}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$; représenter graphiquement a, b.
c) Réciproquement si $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$; trouver $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $\vec{v}_1 = a\vec{i} + b\vec{j}$; représenter graphiquement a', b'.
d) Plus généralement si (x, y) sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base canonique; trouver les coordonnées (x', y') de $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 3
On considère un système de 3 équations linéaires à 3 inconnues: où a est un paramètre réel qu'on suppose fixé.

$$\begin{cases} (a+4)x+3y+z &= 3 \\ -(a+3)x-2y-z &= -1 \\ (a-6)x+(a-4)y+(a-2)z &= -2 \end{cases} \tag{1}$$

a) Ecrire la matrice A du système.
On pourra écrire le système (**??**) comme une équation matricielle: $A.X = Y$
b) Calculer le déterminant de A.
c)Pour quelles valeurs de a le système a une solution unique ? Exprimer la solution en fonction de A et de Y. Calculer A^{-1}.
d) Résoudre pour $a = 0$.
e) Résoudre pour $a = 1$

Exercice 4
a) Montrer que $\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x \sin y; \sin(x+y) = \sin x.\cos y - \sin y \cos y$
on pourra utiliser la formule d'Euler $e^{iz} = \cos z + i\cos z$.
En déduire une expression de $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan x$ et de $\tan y$.
b) Montrer que $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$. En déduire une expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$.
c) Démontrer les identités $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$, et $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

Exercice 5
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. On identifiera un vecteur de $\mathbb{R}^2$ à la matrice colonne (de taille 2x1) formée de ses coordonées dans la base $\mathscr{B}$.
a) Calculer, pour chaque paire de vecteurs suivantes : le produit scalaire, la longueur de chaque vecteur et leur angle:

$$\{\vec{e},\vec{f}\} := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \{\vec{e'},\vec{f'}\} := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}, \{\vec{e''},\vec{f''}\} := \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\}$$

b) Calculer l'aire du paralélogramme défini par chaque paire de vecteurs .
c) Pour tout $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ montrer que

$$(x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz+yt)^2 + (xt-yz)^2$$

En déduire que pour deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$||v||^2.||w||^2 = \langle v, w\rangle^2 + \phi(v, w)^2$$

où ϕ est une forme bilinéaire antisymétrique qu'on déterminera et qu'on interprétera géométriquement
d) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Exercice 6
a)On considére l' application $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f((x,y),(x',y')) = xx' - yy'$.
Montrer que c'est une application bilinéaire symétrique, mais que ce n'est pas un produit scalaire.
b) Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On définit la distance de u à v par $d(u,v) = \sqrt{|b(u-v, u-v)|}$.
Est-ce que d vérifie l'inégalité triangulaire?
c) Plus géneralement soit $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
définie par $f((x,y),(x',y')) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A quelles conditions sur les coefficients a, b, c, d, l'application b définit-elle un produit scalaire?

Exercice 7
Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire Euclidien noté $\langle , \rangle$.
a)On pose $N(\vec{v}) := \sqrt{\langle v, v\rangle}$; montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$
b) On définit $d(v,w) := N(v-w)$; montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
c) On notera $d(v,w)$ par $||v-w||_2$ ou simplement par $||v-w||$.
d) Montrer que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(||u+v||^2 - ||u-v||^2) = \frac{1}{2}(||u+v||2 - ||u||^2 - ||v||^2) = -\frac{1}{2}(||u-v||2 - ||u||^2 - ||v||^2)$$

Exercice 8
a) Orthonormaliser les familles de vecteurs suivants :

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \tag{2}$$

b) Soit $\{e_1, e_2 \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$; montrer que

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \quad v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i$$

b) Soit (E,d) un espace muni d'une distance; on appelle isométrie toute application $E \longrightarrow E$ qui conserve la distance ie telle que

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

Montrer que toute isométrie est injective.
Montrer qu'une isométrie-en toute généralité- n'est pas nécéssairement surjective (on considérera par exemple $(\mathbb{R}^+, |.|)$

c) On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la distance Euclidienne notée $||.||$ et on suppose que f est une isométrie telle que $f(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Montrer que

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad ||f(u)||^2 = ||u||^2$$

d) En déduire que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \qquad \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

Et que l'image d'une base orthonormale par f est une base orthonormale.
e)* Montrer alors que f est linéaire et que f est une bijection.
f) Soit A la matrice représentant f dans une base orthonormée. Montrer que

$$^{t}A.A = Id$$

g) En déduire que A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & \mp b \\ b & \pm a \end{pmatrix} \tag{3}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$