Université François Rabelais de Tours
Département de Mathématiques

# Td 3 : Produit scalaire

Algèbre — Semestre 4, 2021

**Exercice 1.** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en précisant l'espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$ dans lequel on travaille et les vecteurs concernés) établir les inégalités suivantes et étudier les cas d'égalité :

1. $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq \sqrt{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$;
2. $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$;
4. $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(M)^2 \leq n \operatorname{tr}({}^tM \cdot M)$;
5. Pour toute fonction $f$ continue et strictement positive sur $[a, b]$, avec $a < b$, on a
$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right) \geq (b-a)^2.$$

**Exercice 2.** Soient $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1-x, x-y, y-z, z)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que $\langle u, v \rangle = 1$.
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, résoudre dans $\mathbb{R}^4$ l'équation suivante
$$(1-x)^2 + (x-y)^2(y-z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

**Exercice 3.** Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Notons $\phi$ la forme bilinéaire définie pour tous vecteurs $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$ par $\phi(u, v) = ax_1y_1 + bx_2y_2 + cx_2y_1 + dx_1y_2$. A quelles conditions sur $a, b, c, d$, a-t-on que $\phi$ est un produit scalaire sur $E$ ?

**Exercice 4.** Soit $E = \mathbb{R}^2$.

1. Prouver que la forme bilinéaire $b$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est un produit scalaire sur $E$.
2. En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|2x + 3y| \leq \sqrt{5}\sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2}$.

**Exercice 5.** Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$.

1. Prouver que l'application $b$ de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$b(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$
est un produit scalaire sur $E$.
2. Définir la norme $\|\cdot\|$ issue de $b$.
3. Prouver que pour toute fonction $f \in E$, on a
$$\left|f(0) + \int_0^1 f'(t)dt\right| \leq \sqrt{2}\sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt}.$$