Chapitre 5

Intégrales doubles et multiples

Une partie de ce cours est consacrée à l'étude de l'intégration des fonctions de la variable réelle. On peut aussi vouloir définir l'intégration d'une fonction de plusieurs variables réelles $f(x,y,z)$. Il est à noter que dans ce cas cette notion d'intégration n'est plus directement liée à une notion de primitive. D'une manière générale cette théorie sera développée dans le cours *Intégration* de la troisième année de Licence.

Nous allons donc nous intéresser à des cas simples où cette intégration peut être définie et les preuves seront omises. La visée de ce chapitre est principalement calculatoire.

5.1 Domaines simples et définition de l'intégrale multiple

Nous allons commencer par étudier le cas de deux variables réelles. Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est appelée domaine simple (en x) de $\mathbb{R}^2$ si il existe un segment $[a,b]$ et deux fonctions $u_-, u_+ \in C^0([a,b],\mathbb{R}))$ tels que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, u_-(x) \leq y \leq u_+(x)\}$$

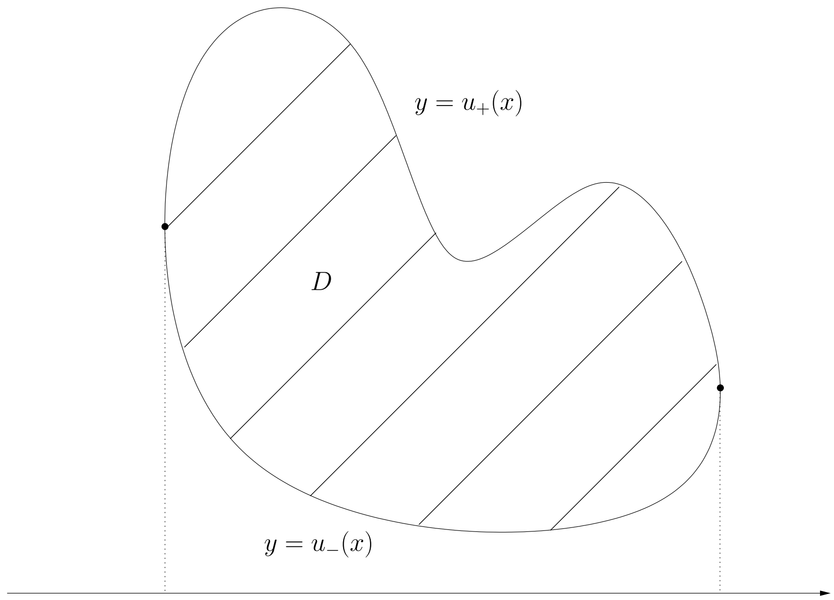
Un exemple élémentaire de domaine simple est un pavé $D = [a,b] \times [c,d]$, dans ce cas les fonctions u_- et u_+ sont constantes $u_- = c$ et $u_+ = d$.

On définit alors l'intégrale double sur D d'une fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ par la formule suivante :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u_-(x)}^{u_+(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

On peut aussi dire que D est un domaine simple (en y) si il existe un segment $[c,d]$ et deux fonctions $v_-, v_+ \in C^0([a,b],\mathbb{R}))$ tels que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, v_-(y) \leq x \leq v_+(y)\}$$



Dans ce cas la définition de l'intégrale double sur D de f devient :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{v_-(y)}^{v_+(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Si D est un domaine simple (en x et y), un résultat remarquable dû à Fubini affirme que le deux définitions ci-dessus coïncident :

$$\int_a^b \left(\int_{u_-(x)}^{u_+(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{v_-(y)}^{v_+(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Lorsque la fonction f est la fonction constante 1, l'intégrale double de 1 sur D est appelée aire de D.

Exemple. Dans le cas où D est un rectangle $[a,b] \times [c,d]$, on peut calculer

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \int_a^b \int_c^d dydx = \int_a^b (d-c)dx = (b-a)(d-c)$$

On retrouve l'aire classique d'un rectangle.

Considérons le disque de rayon $r > 0$ $D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$. D_r est un domaine simple (en x) de $\mathbb{R}^2$: on pose $u_\pm(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ pour $x \in [-r, r]$. Ainsi en faisant le changement de variable $x = r\sin\theta$ on obtient

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D_r) = \iint_D dxdy = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dydx &= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{r^2 - r^2\sin^2\theta}\; r\cos\theta d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^2\cos^2\theta d\theta \\
&= r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 2\theta + 1)d\theta \\
&= r^2\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi r^2
\end{aligned}$$

Ceci nous redonne bien l'aire du disque unité.

Considérons $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[1,2] \text{ et } 0\le y\le \frac{1}{x}\}$. Calculons $\iint_D \ln x dxdy$ et $\iint_D y\ln x dxdy$. On a

$$\iint_D \ln x dxdy = \int_1^2\int_0^{1/x}\ln x dydx = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln x dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln^2 2$$

et

$$\begin{aligned}
\iint_D y\ln x dxdy = \int_1^2\int_0^{1/x} y\ln x dydx &= \frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x^2}\ln x dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x}\ln(x)\right]_1^2 + \int_1^2\frac{1}{2x^2}dx \\
&= -\frac{\ln 2}{4} + \left[-\frac{1}{2x}\right]_1^2 = \frac{1}{4}(1-\ln 2)
\end{aligned}$$

Pour des fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}^n$ une notion de domaine simple n'est pas évidente à choisir. Nous allons donc choisir une définition par récurrence qui pose plusieurs problèmes que nous allons laisser de côté. Considérons donc $D\subset\mathbb{R}^n$ une partie bornée ($n\ge 3$) et posons, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $D_t = \{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1,\ldots,x_{n-1},t)\in D\}$. On dira donc que D est un domaine simple de $\mathbb{R}^n$ si D_t est vide ou un domaine simple de $\mathbb{R}^{n-1}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

L'exemple de base d'un domaine simple est là aussi le pavé $D = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$.

Si D est un domaine simple de $\mathbb{R}^n$ et f est continue sur D, on définit alors

$$\int\ldots\int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int_a^b\left(\int\cdots\int_{D_t} f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)dx_1\ldots dx_{n-1}\right)dt$$

où a et b sont choisis de sorte que $D_t=\emptyset$ pour $t<a$ et $t>b$.

Lorsque $f\equiv 1$ sur D, l'intégrale est appelée hypervolume de D (volume dans le cas $n=3$).

Exemple. Calculons le volume de la boule B unité de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Avec les notations de ci-dessus la tranche B_t est un disque de rayon $\sqrt{1-t^2}$. Ainsi

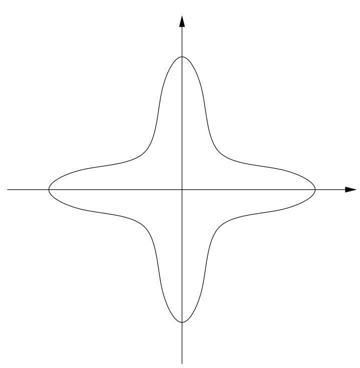
$$\mathrm{Vol}(B) = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{B_t} dxdy \right) dt = \int_{-1}^{1} \pi(1-t^2)dt = \pi \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi$$

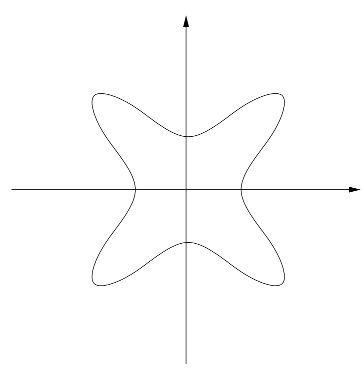
5.2 Formule de changement de variables

De la même façon qu'il existe une formule de changement de variable en dimension 1, il en existe une en toute dimension. Nous allons l'énoncer ici pour deux cas particuliers (uniquement en dimension 2). On peut la voir dans notre cas comme une méthode pour intégrer des fonctions sur des domaines qui ne sont pas simples au sens de la définition ci-dessus.

Le cas affine

Considérons les deux domaines ci-dessous, celui est de gauche est un domaine simple, celui de droite ne l'est pas : l'intersection avec une droite verticale ou horizontal n'est pas toujours constituée d'un seul segment. Pourtant celui de droite diffère du premier uniquement par un rotation d'angle 45°. On devrait donc pouvoir intégrer aussi sur ce domaine.





La solution pour ramener une intégration sur le second domaine à une intégration sur le premier est d'appliquer une formule de changement de variable.

Considérons $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^2$. On définit alors une application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

Autrement dit, si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_1, b_2)$, on a $\varphi(x,y) = (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2)$. Maintenant si D est un domaine simple et f est une fonction continue sur $\varphi(D)$, on a la formule de changement de variable.

$$\iint_D (f \circ \varphi)(x,y) |\det A| dxdy = \iint_{\varphi(D)} f(x,y) dxdy$$

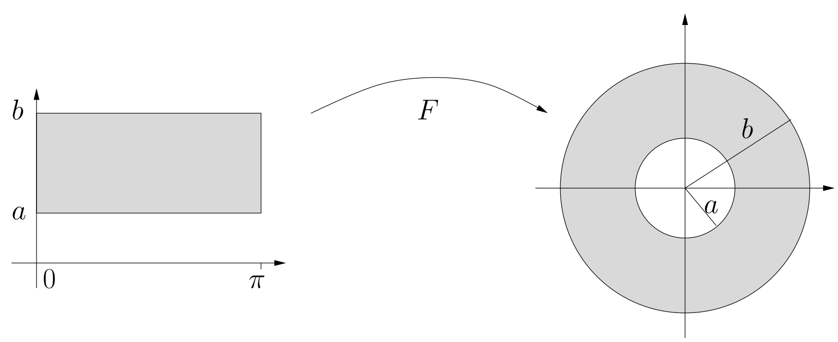
Pour les deux domaines ci-dessus, on peut donc considérer $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $B = 0$. φ envoie alors le premier sur le second.

Le cas polaire

Le second cas que nous allons décrire est celui des changements de coordonnées polaires. Plus précisément sur $\mathbb{R}^2$ on définit $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Si on considère le pavé $P = [0,r] \times [0,2\pi]$, son image $F(P)$ est le disque unité. Une formule de changement de variables devrait donc permettre de ramener une intégrale sur le disque à une intégrale sur P (d'autant plus que F est injective sur le pavé ouvert $]0,1[\times]0,\pi[$).

Si $0 < a < b$, l'image du pavé $[a,b] \times [0,2\pi]$ par F n'est plus un disque mais un anneau de centre l'origine et de rayon interne a et externe b.



On a aussi une formule de changement de variable. Soit P un pavé contenu dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que F est injectif sur le pavé ouvert associé. Si f est une fonction continue sur le $F(P)$, on a alors

$$\iint_P f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta = \iint_{F(P)} f(x,y) dx dy$$

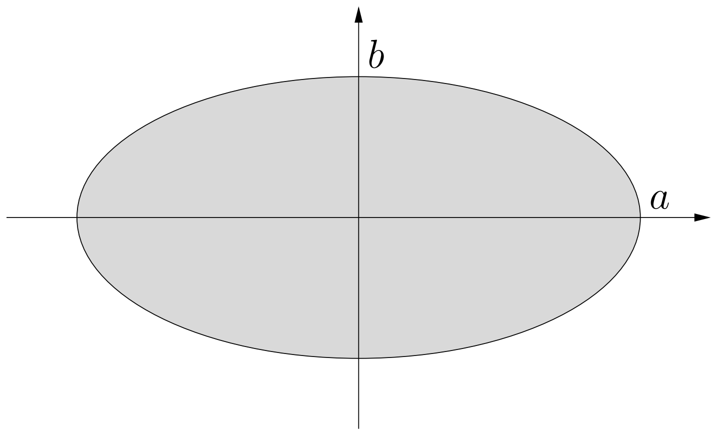
Exemple. Recalculons l'aire d'un disque D_R de rayon R avec cette formule :

$$\text{Aire}(D_r) = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} r dr d\theta = 2\pi \int_0^R r dr = \pi R^2$$

5.3 Exemple de calcul d'aire et de volume

Aire de l'ellipse

Calculons l'aire de l'ellipse $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.



Tous d'abord nous remarquons que E est un domaine simple décrit avec $u_{\pm}(x) = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ pour $x \in [-a, a]$. Ainsi, avec le changement de variable $x = a\sin\theta$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(E) = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2b\sqrt{1-\sin^2\theta}\ a\cos\theta d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2ab\cos^2\theta d\theta = \pi ab\end{aligned}$$

Un autre approche pour ce calcul est la suivante. Considérons $\varphi(x, y) = (ax, by)$, on constate que $\varphi(D_1) = E$ où D_1 est le disque unité. φ est une application affine associée à $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $B = (0, 0)$. Ainsi la formule de changement de variable donne

$$\mathrm{Aire}(E) = \iint_{\varphi(D_1)} dxdy = \iint_{D_1} |\det(A)|dxdy = ab\,\mathrm{Aire}(D_1) = \pi ab$$

Aire et image par des homothéties

Une homothétie est une transformation affine de la forme $\varphi : (x, y) \mapsto \lambda(x, y) + B$: il s'agit du cas où $A = \lambda I_2$. Si D est un domaine simple, on a

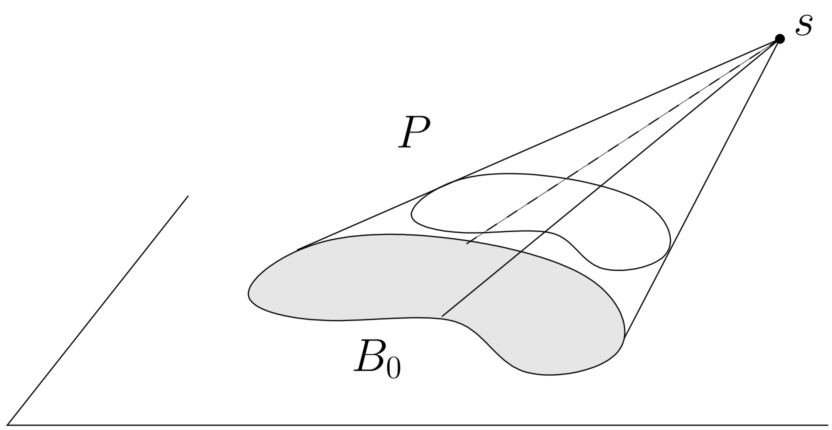
$$\mathrm{Aire}(\varphi(D)) = \iint_{\varphi(D)} dxdy = \iint_D \lambda^2 dxdy = \lambda^2\mathrm{Aire}(D)$$

Volume d'une pyramide

Définissons tout d'abord la notion de pyramide que nous allons considérer. Fixons un domaine B de $\mathbb{R}^2$ et notons $B_0 = B \times \{0\}$, il s'agit de la « base » de notre pyramide.

Fixons s un point de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, le « sommet » de notre pyramide, la pyramide P est alors l'union des segments de $\mathbb{R}^3$ dont les extrémités sont s et un point de B_0 :

$$P = \{(1-t)p + ts \in \mathbb{R}^3;\ t \in [0, 1] \text{ et } p \in B_0\}$$



Notons que si $s = (s_1, s_2, s_3)$ la troisième coordonnée de $(1-t)p + ts$ est ts_3. Ainsi le domaine $P_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, u) \in P\}$ est $\{(1 - \frac{u}{s_3})p + \frac{u}{s_3}(s_1, s_2);\ p \in B\}$ (pour $0 \leq u \leq s_3$) autrement dit il s'agit de l'image de B par une homothétie de rapport $(1 - \frac{u}{s_3})$. Nous pouvons donc calculer (si B est un domaine simple)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(P) = \int_0^{s_3} \iint_{P_u} dxdydu = \int_0^{s_3} \mathrm{Aire}(P_u)du &= \int_0^{s_3} (1 - \frac{u}{s_3})^2 \mathrm{Aire}(B)du \\
&= \mathrm{Aire}(B) \left[-\frac{s_3}{3}(1 - \frac{u}{s_3})^3 \right]_0^{s_3} \\
&= \mathrm{Aire}(B)\frac{s_3}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi le volume d'une pyramide est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur divisé par 3.

5.4 Calcul de l'intégrale gaussienne

On va montrer la formule suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Cette intégrale est appelé intégrale gaussienne et nous allons donner une preuve de ce résultat en passant par des intégrales doubles

$$I_R = \iint_{D(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \quad \text{et} \quad J_R = \iint_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

Tout d'abord, en $\pm\infty$, on a $e^{-x^2} = o_{\pm\infty}(\frac{1}{x^2})$ donc l'intégrale gaussienne est bien définie.

De plus on constate que $D(0,R) \subset [-R,R]^2 \subset D(0,\sqrt{2}R)$. Comme $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$ on a donc $I_R \leq J_R \leq I_{\sqrt{2}R}$. Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} I_R = \iint_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy \\ &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \int_{-R}^{R} e^{-y^2} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right) \int_{-R}^{R} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Enfin en faisant le changement de variables polaires $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ sur $[0,R] \times [0,2\pi]$ pour décrire $D(0,R)$, on obtient

$$I_R = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}) \to \pi$$

D'après l'encadrement $I_R \leq J_R \leq I_{\sqrt{2}R}$, on obtient donc $J_R \to \pi$. Enfin, d'après (5.1), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Bibliographie

[RWB] J. P. Ramis, A. Warusfel, W. Buff, Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1, Dunod (2018).