Université de Tours
Licence 2 Mathématiques

TD 3 : PGCD, nombres premiers, congruences

Arithmétique — Semestre 1

Exercice 1
Résoudre sur $\mathbb{Z}^2$:

$$51x + 9y = 36, \quad 104x + 951y = 1 \quad \text{et} \quad 610x + 987y = 1.$$

Exercice 2
Trouver $\mathbf{pgcd}\,(360, 294)$ de deux façons : utiliser la décomposition en facteurs premiers, puis l'algorithme d'Euclide.

Exercice 3 (Lemme de Gauss et d'Euclide)
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier.

1. Montrer le *lemme de Gauss* :

$$\Big(a \mid bc \ \text{ et } \ \mathbf{pgcd}\,(a,b) = 1\Big) \implies a \mid c.$$

   Donner un contre-exemple quand a et b ne sont pas premiers entre eux.

2. Montrer que si p ne divise pas a, alors $\mathbf{pgcd}\,(a,p) = 1$. En déduire le *lemme d'Euclide* :

$$p \mid ab \implies \Big(p \mid a \ \text{ ou } \ p \mid b\Big).$$

3. Montrer que

$$\mathbf{pgcd}\,(a, bc) = 1 \iff \left(\mathbf{pgcd}\,(a,b) = 1 \text{ et } \mathbf{pgcd}\,(a,c) = 1\right).$$

Exercice 4
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux. Démontrer chacune des assertions suivantes.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\Big(\alpha \mid a \ \text{ et } \ \beta \mid b\Big) \implies \mathbf{pgcd}\,(\alpha, \beta) = 1.$$

2. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{pgcd}\,(a^n, b^m) = 1$.
3. $\mathbf{pgcd}\,(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$.
4. $\mathbf{pgcd}\,\big(a + b, a^2 - ab + b^2\big) \in \{1, 3\}$.

Exercice 5
Démontrer les résultats suivants à l'aide des congruences.

1. 7 divise $3 \times 2^{101} + 9$.
2. Tout entier de la forme $n^3 - n$ est divisible par 6.
3. Tout carré parfait se termine par un $0, 1, 4, 5, 6$ ou 9.
4. La différence de deux cubes consécutifs n'est pas divisible par 3.
5. Un nombre de la forme $3k - 1$ ne peut pas s'écrire sous la forme $x^2 + 3y^2$.
6. L'équation $4x^{10} + x^4 - 8x - 2 = 0$ n'a pas de solution entière.
7. Si $7 \mid a^2 + b^2$ alors $7 \mid a$ et $7 \mid b$.