T D 2

Calcul Intégral

1 1) Chercher les primitives des fonctions suivantes dans leurs ensembles de définition :

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^3+1)^2};\quad g(x)=(3x^2+4)^3x;\quad h(x)=\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)};\quad k(x)=\frac{1}{x^2+a^2}\ (a\neq 0).$$

2) Indiquer les fonctions pour lesquelles $\int_0^{\pi} ...dx$ a un sens. Même question pour $\int_{-1.5}^{1.5} ...dx$.

2 Calculer les intégrales suivantes (intégration(s) par parties ou changement de variable)

$$I_1=\int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x \qquad I_2=\int_{-\sqrt{\ln 2}}^0 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_3=\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x \qquad I_4=\int_0^1 x(x-1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$I_5=\int_0^1 x Arctan\, x\,\mathrm{d}x \qquad I_6=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \qquad I_7=\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \qquad I_8=\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$$

3 1) Calculer A_1, A_2, A_3 tels que $\dfrac{x^2-3x+1}{(x+1)^2(x-3)}=\dfrac{A_1}{x+1}+\dfrac{A_2}{(x+1)^2}+\dfrac{A_3}{x-3}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-3x+1}{(x+1)^2(x-3)}\,\mathrm{d}x$.

2) Calculer les fonctions polynomiales P,Q telles que $\dfrac{x^3+2x-1}{x^2-1}=P(x)+\dfrac{Q(x)}{x^2-1}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3+2x-1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

2bis) Peut-on calculer également $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x^3+2x-1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$? Cette expression a-t-elle un sens?

3) Chercher une primitive de la fonction $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ puis celle de $\psi(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

3bis) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3-3x^2-1}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x$

4 On se propose de calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}},\ J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x,\ K=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

1) On pose $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est bien définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$. En déduire la valeur de I.
2) Vérifier que $J + I = K$.
3) A l'aide d'une intégration par partie portant sur K, montrer que $K = \sqrt{2} - J$. En déduire les valeurs de J et K.

5 Soit m et n deux entiers naturels. On pose

$$I(n,m) = \int_0^1 t^n (1-t)^m \, \mathrm{d}t.$$

1) Calculer $I(n,0)$.
2) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$I(n,m) = \frac{m}{n+1} I(n+1, m-1).$$

3) Montrer que $I(n,m) = \dfrac{n!m!}{(n+m)!} I(n+m, 0)$. En déduire que $I(n,m) = \dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}$

6 * Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$.
1) Calculer I_0, I_1.
2) Montrer que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
3) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$$

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2n+4}.$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
4) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}.$$

b) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2.$$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

7 Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable suggéré :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{2t}}{2+e^t}\,\mathrm{d}t,\ \text{poser } y = e^t\,, \qquad I_2 = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t}},\ \text{poser } x = \sqrt{1+t}$$

$$I_3 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}x}{e^x - e^{-x}},\ \text{poser } y = e^x\,, \qquad I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,\ \text{poser } x = \cos t$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,\ \text{poser } x = \sin t\,, \qquad I_6 = \int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t,\ \text{poser } t = \sin x\,,$$

8 *("la substitution universelle")*
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}.$$

Indication : Utiliser le changement de variable $t = \tan(x/2)$.
On rappele que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

9 **(changement à paramètre)*

1) Montrer que $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. (Poser $x = \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$)

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}(b-a)^2.$$

Indication : Utiliser le changement de variable : $x = \frac{(b-a)y + a + b}{2}$.

10 *(la définition de l'intégrale via les sommes de Riemann)*
En utilisant les sommes de Riemann pour une fonction à choisir calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

11 * *(question théorique partiellement vue en cours)*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) On suppose que $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in [a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

2) On suppose que $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Montrer que f garde un signe constant sur $[a,b]$.

$\boxed{\textbf{12}}^*$ Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur $[0, \pi]$.
On se propose de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(x) \left|\sin(nx)\right| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, .., n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x = \frac{2}{n}.$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, .., n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

En déduire que

$$\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_0^{\pi} f(x) \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

3) Conclure.