UNIVERSITÉ DE TOURS– L2– GÉOMÉTRIE 2019-2020

Feuille 4

Exercice 0 Soient $A=(x_A,y_A), B=(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan affine $\mathbb{R}^2$.

1. Donner l'équation cartésienne de la droite (AB). Calculer la pente de cette droite en fonction des coordonnées de A et de B.
2. Montrer que deux droites sont orthogonales ssi leurs pentes p et p' satisfont l'équation $pp'=-1$ (on supposera que p et p' sont non nuls;
3. Soient a,b,c trois réels distincts non nuls. On considère le triangle du plan cartésien (A,B,C) où $A=(a,0), B=(b,0), C=(0,c)$.
   (a) Donner l'équation cartésienne de chacune des droites $(AB),(AC)$ en fonction de a,b,c.
   (b) Calculer l'équation cartésienne de la droite (BC) puis l'équation de la hauteur du triangle (A,B,C) passant par A.
4. En déduire que les trois hauteurs sont concourantes et calculer les coordonnées de l'orthocentre du triangle.

Exercice 1

1. Soient $A=(x_A,y_A)$ un point du plan cartésien et d une droite d'équation $ax+by+c=0$. Calculer la distance du point A à la droite d.
2. Soient $A=(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace cartésien et p un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$. Calculer la distance du point A au plan p.
3. (**) Soient deux droites d et d' de l'espace passant respectivement par les points A et B et de vecteur directeur respectif v et v'. Déterminer la distance de d à d'.

Exercice 2 Soient $A=(0,0), B=(1,0), C=(1,1)$

1. Construire le point X de coordonnées barycentriques $(0,1,1)$ par rapport à (A,B,C)
2. Construire le point Y de coordonnées barycentriques $(1,2)$ par rapport à (A,X)
3. Construire le point Z de coordonnées barycentriques $(1,1,1)$ par rapport à (A,B,C). Que constatez vous?
4. Trouver les coordonnées cartésiennes du point T de coordonnées barycentriquesn$(0,-2,1)$ par rapport à (A,B,C)
5. Représenter graphiquement le point de coordonnées barycentriques $(30/100, 60/100, 10/100)$ par raport à trois points non alignés (S,C,B)
6. Décrire l'ensemble $\{M\in\mathbb{R}^2 : \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}, \quad t\in[0,1]\}$
7. Montrer que M est de coordonnées (α,β) par rapport à deux points A,B distincts ssi
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$$
(on supposera $\beta\neq 0$).

Exercice 3 Dans un plan vectoriel E, Soient A, B, C trois points non alignés et soit $M : (\alpha, \beta, \gamma)$ le point de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans la base affine (A, B, C)

1. Démontrer que la condition $\alpha = 0$ signifie que le point M appartient à la droite (BC)
2. Démontrer que la condition $\alpha = 1$ signifie que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$
3. Démontrer que l' ensemble des points $M : (\alpha, \beta, \gamma)$ tels que $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$ est une droite (u, v, w sont des réels donnés. On pourra considérer le repère vectoriel $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$).

Exercice 4 Soit (A, B, C) un triangle non plat. On notera a, b, c les longueurs des côtés BC, AC, AB. Supposons que la bissectrices en A coupe le côté BC en un point A'.

1. Montrer que

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{c}{b}$$

2. En déduire que les bissectrices intérieures du triangle sont concourantes et donner les coordonnées barycentriques du point d'intersection dans la base affine (A, B, C)

Exercice 5 Soit (A, B, E, C) un trapèze, les côtés AB et AC étant parallèles. Soit I le milieu de AC et J le milieu de EB; montrer que le segment IJ (médiane du trapèze) est de longueur

$$\frac{AB + AC}{2}$$

Exercice 6
On considère le plan P_1 de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = 0$ et le plan P_2 d'équation $x + y + z = 1$.
1) Déterminer $D := P_1 \cap P_2$.
2) Montrer que les plans P_λ d'équation $\lambda x + (1 - \lambda)(x + y + z - 1)$ contiennent tous D.
3) Soit D_a la droite passant par le point $(1, 1, 1)$ et de vecteur directeur $(\cos a, \sin a, 0)$.
Pour chaque valeur de a déterminer si possible le point $P_a = D_a \cap P_2$